Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 07.11.2012
Funktionen, Ableitungen, Taylor-Reihen

Aufgabe 1

a) $f(x) = e^{a\cdot x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=0)$

$\sum\limits_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=0) = \underline{\underline{1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{6} + \frac{a^4x^4}{24} + \frac{a^5x^5}{120}}}$

b) $f(x) = ln(a\cdot x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=1)$

$\sum\limits_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=1) = \underline{\underline{\ln a + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}}$

Aufgabe 2 – Funktionswerte

Berechnet man streng mathematisch die Werte der Funktionen an den entsprechenden Stellen, so existieren viele der Funktionswerte nicht, da die Division durch Null nicht erlaubt ist.

a) $f(0) = \frac{\sin 0}{0} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$ $\quad g(0) = \frac{0}{\sin 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$

$f(\pi) = \frac{\sin\pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = \underline{\underline{0}}$ $\quad g(\pi) = \frac{\pi}{\sin\pi} = \frac{\pi}{0} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=0) = \frac{\cos 0}{0} - \frac{\sin 0}{0^2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$ $\quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x=0) = \frac{1}{\sin 0} - \frac{0\cdot\cos 0}{(\sin 0)^2} = \frac{1}{0} - \frac{0\cdot 0}{0^2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$

Aufgabe 2 – Grenzwerte

Man kann allerdings auch die beidseitigen Grenzwerte berechnen, wobei die Beziehungen $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ sowie $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = x$ und $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x = \lim\limits_{x\to\pi}\sin(\pi - x) = \pi - x$ hilfreich sind.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{x} = \frac{0}{\pi} = \underline{\underline{0}}$ $\quad \lim\limits_{x\to\pi} g(x) = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\pi - x} = \underline{\underline{\infty}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2} = \underline{\underline{0}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} - \frac{x\cdot\cos x}{(\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{(\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2} = \underline{\underline{0}}$

Aufgabe 3

$\frac{\partial(y^3 - 3y^2x + x^3)}{\partial x} = \underline{\underline{3x^2 - 3y^2}}$

$\frac{\partial(y^3 - 3y^2x + x^3)}{\partial y} = \underline{\underline{3y^2 - 6xy}}$

Aufgabe 4

a) $\left(P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) - nRT = 0 \Rightarrow P = \frac{nRT}{V-nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = \underline{\underline{\frac{2an^2}{V^3} - \frac{nRT}{(V-nb)^2}}}$

b) $\kappa_T = -\frac{1}{V}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{V}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^{-1} = -\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{\frac{2an^2}{V^3} - \frac{nRT}{(V-nb)^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{nRTV}{(V-nb)^2} - \frac{2an^2}{V^2}}}}$

Anmerkung: Ich bin überzeugt davon, dass der unterstrichene Term für κ_T falsch ist, da die Rechenregeln für Differentialquotienten (Umkehrregel) wesentlich komplexer sind. Da ich die van-der-Waals-Gleichung jedoch nicht nach V umzustellen vermag und der Ausdruck bei c) zu keinem Widerspruch führt, habe ich ihn trotzdem angegeben.

c) $\kappa_T = \lim\limits_{a,b\to 0}\frac{1}{\frac{nRTV}{(V-nb)^2} - \frac{2an^2}{V^2}} = \frac{1}{\frac{nRTV}{V^2}} = \frac{V}{nRT}$

Nach der idealen Gasgleichung ist $PV = nRT \Rightarrow \frac{V}{nRT} = \frac{1}{P}$, also:

$\kappa_T = \underline{\underline{P^{-1}}}$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man, wenn von der idealen Gasgleichung ausgeht:

$\kappa_T = -\frac{1}{V}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{nRT}{p}\right)_T = -\frac{1}{V}\cdot\frac{-nRT}{p^2} = \frac{nRT}{p^2V} = p^{-1}$