Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 16.01.2013
FOURIER-Reihe und -Transformation

Aufgabe 1

a) $a_n = -\frac{1}{5}\int\limits_{-4}^{-1} \sin\left(n\pi\frac{x}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{\cos\left(\frac{1}{5}\pi n\right)-\cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right)}{\pi n}$

$b_n = -\frac{1}{5}\int\limits_{-4}^{-1} \cos\left(n\pi\frac{x}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sin\left(\frac{1}{5}\pi n\right)-\sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)}{\pi n}$

b) $\lim\limits_{n\to+0} \frac{\sin\left(\frac{1}{5}\pi n\right)-\sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)}{\pi n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\cdot 5}\cdot\int\limits_{-4}^{-1} -1\mathrm{d}x$

Verwendet man für den Sinus die Kleinwinkelnäherung, so ergibt sich:
$\frac{\frac{1}{5}\pi n-\frac{4}{5}\pi n}{\pi n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\cdot 5}\cdot(-3)$ ist eine falsche Aussage, da $-\frac{3}{5} \neq -\frac{3}{10}$
$b_{n\to 0}$ liefert nicht den gleichen Wert wie b_0, sondern das Doppelte (so auch in Aufgabe 2).
Die Gleichheit gilt nicht.

c) $b_0 = -0.3000$; $a_1 = 0.5150$; $b_2 = 0.3027$; $a_3 = -0.0656$; $b_4 = 0.0935$; $a_5 = -0.1273$
$a_0 = b_1 = a_2 = b_3 = a_4 = b_5 = 0$

Aufgabe 2

Die darzustellende Funktion lässt sich wie folgt definieren (hier nur für eine Periode $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{\omega};\frac{\pi}{\omega}\right]$):

$u(t) = \sin(\omega t)\cdot\Theta(t)$ (gleichbedeutend mit $u(t) = 0$ für $t < 0$ und $u(t) = \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$)

Daraus folgen die FOURIER-Koeffizienten:

$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t)\cdot\sin(n\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{\sin(\pi n)}{\pi\cdot(1-n^2)}$ für $n > 1$

$a_1 = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ (wie Aufgabe 2 zum 28. November 2012)

$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t)\cdot\cos(n\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{\cos(\pi n)+1}{\pi\cdot(1-n^2)}$ für $n > 1$ $(b_1 = 0)$

$b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)\ \mathrm{d}t = 0$

$b_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\omega}\right)\cdot\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{1-(-1)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$

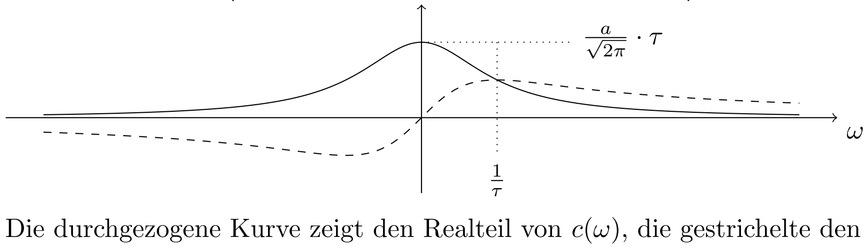
Damit gilt: $\underline{\underline{u(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\sin(\omega t) - \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2-1}}}$

Aufgabe 3

$S(t) = a\cdot e^{-t/\tau}\cdot\Theta(t)$

$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^{\infty} a\cdot e^{-t/\tau}\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-t/\tau}\cdot e^{-i\omega t}\cdot\frac{-\tau}{1+i\omega\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\tau}{1+i\omega\tau} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\tau-i\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(c(\omega)) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} \quad$ und $\quad \mathrm{Im}(c(\omega)) = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$



Die durchgezogene Kurve zeigt den Realteil von $c(\omega)$, die gestrichelte den Imaginärteil von $c(\omega)$.