Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 19.12.2012
Differentialgleichungen und Matrizen

Aufgabe 1

a) $c_\mathrm{C}(t)$ kann $c_\mathrm{C}(t=0) + \min\left(c_\mathrm{A}(t=0), \frac{c_\mathrm{B}(t=0)}{2}\right) = \frac{c_0}{2}$ niemals überschreiten.

b) $\frac{\mathrm{d}c_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = k \cdot c_\mathrm{A} \cdot c_\mathrm{B}^2 = k \cdot (c_0 - c_\mathrm{C}) \cdot (c_0 - 2c_\mathrm{C})^2$

c) Im Folgenden sei $c = c_\mathrm{C}(t)$, dann bleibt nach der Variablentrennung:

$\int k\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(c_0-c)\cdot(c_0-2c)^2}\mathrm{d}c = \int \frac{1}{c_0^2(c_0-c)} - \frac{2}{c_0^2(c_0-2c)} + \frac{2}{c_0(c_0-2c)^2}\mathrm{d}c$

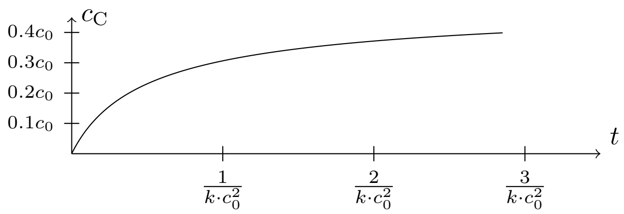
$k \cdot t = \frac{1}{c_0^2} \cdot \left(-\ln(c-c_0) + \ln(2c-c_0) + \frac{c_0}{c_0-2c}\right) + C = \frac{1}{c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2c-c_0}{c-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2c}\right) + C$

Einsetzen der Anfangsbedingung $t=0$ und $c=0$ liefert:

$k \cdot 0 = \frac{1}{c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2\cdot 0-c_0}{0-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2\cdot 0}\right) + C \Rightarrow C = -\frac{1}{c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{c_0}{c_0} + \frac{c_0}{c_0}\right) = -\frac{1}{c_0^2}$

Daraus folgt die Abhängigkeit: $\underline{\underline{t = \frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2c-c_0}{c-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2c} - 1\right)}}$

d)



e) Aus $t = \frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2c_\mathrm{C}-c_0}{c_\mathrm{C}-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2c_\mathrm{C}} - 1\right)$ folgt mit den Beziehungen für $c_\mathrm{A}(t)$, $c_\mathrm{B}(t)$ und $c_\mathrm{C}(t)$:

$$c_\mathrm{C} = c_0 - c_\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2(c_0-c_\mathrm{A})-c_0}{c_0-c_\mathrm{A}-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2(c_0-c_\mathrm{A})} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2c_\mathrm{A}-c_0}{c_\mathrm{A}} + \frac{c_0}{2c_\mathrm{A}-c_0} - 1\right)}}$$

$$c_\mathrm{C} = \frac{c_0-c_\mathrm{B}}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2\frac{c_0-c_\mathrm{B}}{2}-c_0}{\frac{c_0-c_\mathrm{B}}{2}-c_0} + \frac{c_0}{c_0-2\frac{c_0-c_\mathrm{B}}{2}} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{k\cdot c_0^2} \cdot \left(\ln\frac{2c_\mathrm{B}}{c_\mathrm{B}+c_0} + \frac{c_0}{c_\mathrm{B}} - 1\right)}}$$

Aufgabe 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1+0\cdot(-2)+(-2)\cdot3 & 3\cdot(-1)+0\cdot2+(-2)\cdot2 & 3\cdot(-1)+0\cdot3+(-2)\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot(-2)+(-1)\cdot3 & 2\cdot(-1)+1\cdot2+(-1)\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot3+(-1)\cdot1 \\ 2\cdot1+3\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot(-1)+3\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot(-1)+3\cdot3+0\cdot1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ -3 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 3\cdot1\cdot0 + 0\cdot(-1)\cdot2 + (-2)\cdot2\cdot3 - 3\cdot(-1)\cdot3 - 0\cdot2\cdot0 - (-2)\cdot1\cdot2 \\ &= 0+0-12+9+0+4 = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det B &= 1\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot3\cdot3 + (-1)\cdot(-2)\cdot2 - 1\cdot3\cdot2 - (-1)\cdot(-2)\cdot1 - (-1)\cdot2\cdot3 \\ &= 2-9+4-6-2+6 = \boxed{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A\cdot B) &= (-3)\cdot(-2)\cdot7 + (-7)\cdot0\cdot(-4) + (-5)\cdot(-3)\cdot4 - (-3)\cdot0\cdot4 - (-7)\cdot(-3)\cdot7 - (-5)\cdot(-2)\cdot(-4) \\ &= 42+0+60+0-147+40 = \boxed{-5} \end{aligned}$$

$\det A \cdot \det B \overset{!}{=} \det(A\cdot B)$ ist erfüllt wegen $1\cdot(-5) = -5$.

Aufgabe 3

a) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot2 & 1\cdot4+2\cdot(-3) \\ 3\cdot1+2\cdot3 & 3\cdot2+2\cdot2 & 3\cdot4+2\cdot(-3) \\ 2\cdot1+5\cdot3 & 2\cdot2+5\cdot2 & 2\cdot4+5\cdot(-3) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 9 & 10 & 6 \\ 17 & 14 & -7 \end{pmatrix}}}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot2+4\cdot5 \\ 3\cdot1+2\cdot3+(-3)\cdot2 & 3\cdot2+2\cdot2+(-3)\cdot5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 15 & 26 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}}$$

b) $\det(A\cdot B) = 7\cdot10\cdot(-7) + 6\cdot6\cdot17 + (-2)\cdot9\cdot14 - 7\cdot6\cdot14 - 6\cdot9\cdot(-7) - (-2)\cdot10\cdot17 = \underline{\underline{0}}$

$\det(B\cdot A) = 15\cdot(-5) - 26\cdot3 = \underline{\underline{-153}}$