Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 12.12.2012
Differentialgleichungen

Aufgabe 1

a) $y \cdot y' = x^3$

Ansatz:
$y = kx^2 \Rightarrow y' = 2kx$
Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:
$x^3 = kx^2 \cdot 2kx \Rightarrow k = \pm\sqrt{1/2}$
$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{1/2} \cdot x^2}}$

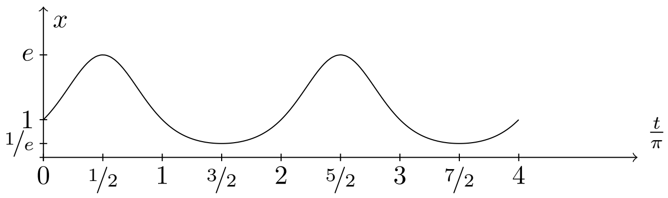
b) $2st\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 + t$

Trennung der Variablen liefert:
$2s\mathrm{d}s = \frac{1+t}{t}\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{t} + 1\right)\mathrm{d}t$
$\int 2s\ \mathrm{d}s = \int \left(\frac{1}{t} + 1\right)\mathrm{d}t$
$s^2 = \ln t + t + c$
$s = \underline{\underline{\sqrt{\ln t + t + c}}}$

c) $0 = (1 + x^2) \cdot y' + 1 + y^2 = (1 + x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 + y^2$
$(1 + x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 - 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{-y^2-1} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
$-\arctan y + c = \arctan x$
$y = \underline{\underline{\tan(c - \arctan x)}}$

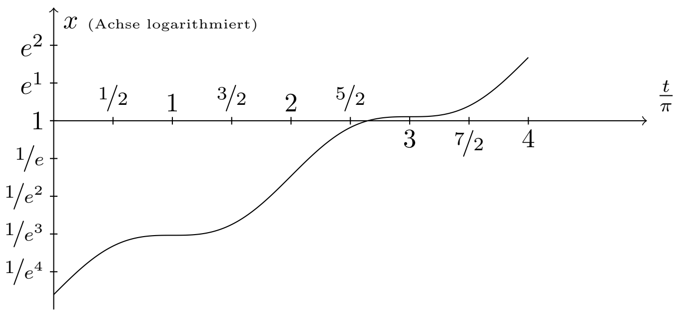
Aufgabe 2

a) $x'(t) = x(t) \cdot \cos t$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \cos t\ \mathrm{d}t$
$\ln x = \sin t + c$
$x = k \cdot e^{\sin t} \qquad x(t = 0) = 1 \Rightarrow k = 1$
$x = \underline{\underline{e^{\sin t}}}$



b) $x'(t) = x(t) \cdot \cos^2(\frac{t}{2})$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \cos^2(\frac{t}{2})\ \mathrm{d}t = \int \left(\frac{e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int \frac{e^{it} + 2 \cdot e^{i\cdot\left(\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right)} + e^{-it}}{4}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos t}{2}\mathrm{d}t$
$\ln x = \frac{t+\sin t}{2} + c$
$x = k \cdot e^{\frac{t+\sin t}{2}} \qquad x(t = 0) = \frac{1}{100} \Rightarrow k = \frac{1}{100}$
$x = \underline{\underline{\frac{1}{100} \cdot e^{\frac{t+\sin t}{2}}}}$



Aufgabe 3

a) Es handelt sich nicht um ein vollständiges Differential, da die Gleichheit, die der Satz von SCHWARZ fordert, nicht erfüllt ist:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\frac{C_V}{T} \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{R}{V}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\frac{C_V \cdot n \cdot R}{P \cdot V} \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{P}{n \cdot T}$
$\frac{n \cdot R \cdot C_V}{P} \cdot \ln V \neq \frac{P}{n} \cdot \ln V$

b) Es handelt sich um ein vollständiges Differential, da sich folgende Funktion $F(T,V)$ angeben lässt:
$F(T,V) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = P$