Toshiki Ishii (Matrikel 3266690)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 17.10.2012
Aufgaben von Pascal Kühn (in Vertretung von Prof. Dr. Morgner)

1. (a) i. $u + v = (2 - 5i) + (-1 + 3i) = (2 - 1) + (-5 + 3)i = \underline{\underline{1 - 2i}}$

   ii. $u \cdot v = (2 - 5i) \cdot (-1 + 3i) = -2 + 6i + 5i - 15i^2 = \underline{\underline{13 + 11i}}$

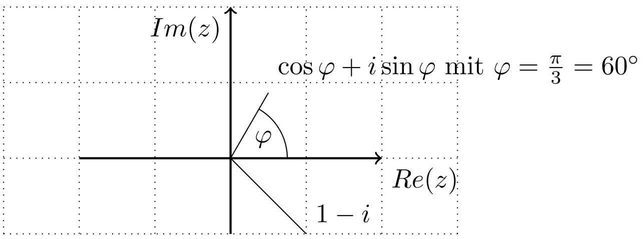
   iii. $\frac{u}{v} = \frac{2-5i}{-1+3i} = \frac{2-5i}{-1+3i} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{-2-6i+5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-17-i}{10} = \underline{\underline{-\frac{17}{10} - \frac{1}{10}i}}$

   iv. $|u + v| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

   (b) $w = 2 - 2i = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot e^{i \cdot \arccos(\frac{-2i}{2}) + \frac{\pi}{2} \cdot (1 - \operatorname{sgn}(Re(w)))} = \underline{\underline{2\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}}}}$

   $\underline{\underline{2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)}}$

   (c)



2. (a) $0 = x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$
   $\Rightarrow (x + 2)^2 = -4$
   $\Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{-4} = 2i$
   $\Rightarrow x = -2 \pm 2i$

   (b) $0 = x^2 - 2ix - 1 = (x - i)^2 = x - i$
   $\Rightarrow x = i$

   (c) $25 = \frac{x+1}{x+i} + i$
   $25 - i = \frac{x+1}{x+i}$
   $\Rightarrow x + 1 = (25 - i) \cdot (x + i) = 25x + 25i - ix - i^2 = 25x + 25i - ix + 1$
   $\Rightarrow x = 25x + 25i - ix$
   $\Rightarrow x = \frac{25i}{1-25+i} = \frac{25i}{i-24} \cdot \frac{-i-24}{-i-24} = \frac{-25i^2-24 \cdot 25i}{1+24^2} = \frac{25-600i}{577} = \underline{\underline{\frac{25}{577} - i \cdot \frac{600}{577}}}$

   (d) $\sqrt{2x - i} = x$
   $\Rightarrow 2x - i = x^2$ (Quadrieren ist keine äquivalente Umformung $\Rightarrow$ erfordert Probe)
   $\Rightarrow 0 = x^2 - 2x + i = (x - 1)^2 - 1 + i$
   $\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - i} = 1 + \sqrt{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k\right)}} = 1 + \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{7\pi}{8} + \pi \cdot k\right)}$
   $\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{8}}$
   $x_2 = \underline{\underline{1 + \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{15\pi}{8}}}}$
   Durchführen der Probe mit der Annahme, dass mit $\sqrt{\ }$ die Hauptwurzel gemeint ist, führt zu dem Ergebnis, dass nur x_2 Lösung ist. Dies ist gleich der von WolframAlpha ausgegebenen Lösung.*
   * = siehe http://www.wolframalpha.com/input/?i=sqrt(2x-i)=x

3. Die Lösungen sind $x_3 = \overline{x_1} = \underline{\underline{-1 - 2i}}$ und $x_4 = \overline{x_2} = \underline{\underline{-2 - i}}$, denn da die Koeffizienten des Polynoms alle reell sind, muss zu jeder komplexen Lösung die komplex konjugierte Zahl ebenfalls Lösung sein.

4. $$\begin{aligned} \cos(x + y) + i \sin(x + y) = e^{i \cdot (x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y - \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \end{aligned}$$

   Hieraus und aus der Tatsache, dass die Gleichheit ihrer Imaginärteile für die Gleichheit zweier komplexer Zahlen notwendig ist, folgt

   $i \sin(x + y) = i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \Rightarrow \underline{\underline{\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y}}$

   Gleiches gilt für ihre Realteile:

   $\underline{\underline{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}}$