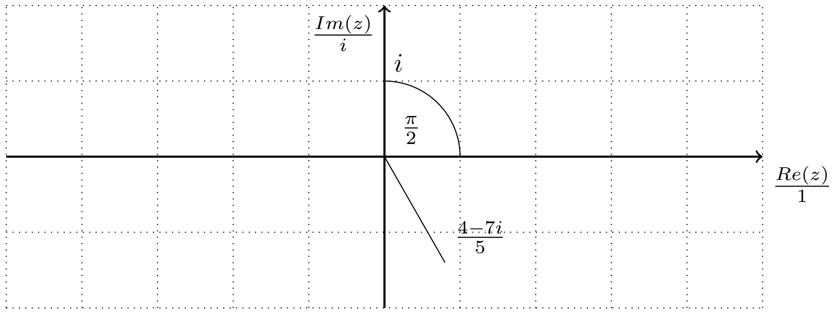
Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 24.10.2012
Komplexe Zahlen; Folgen und Reihen

Aufgabe 1

a) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}}}$

b) $\frac{3-2i}{2+i} = \frac{3-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i-4i+2i^2}{2^2-i^2} = \frac{6-3i-4i-2}{4+1} = \frac{4-7i}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5} - i \cdot \frac{7}{5}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{65}}{5} \cdot e^{i \cdot \arctan \frac{-7}{4}}}}$



Aufgabe 2

a) $1 + 3i = \frac{z}{1-2i}$
$\Rightarrow z = (1+3i) \cdot (1-2i) = 1 - 2i + 3i - 6i^2 = 1 - 2i + 3i + 6 = \underline{\underline{7+i}}$

b) $z^4 = 81 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 81 e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 81 e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)} = 3^4 \cdot e^{4 \cdot i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)}$
$\Rightarrow z = 3 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
$z_1 = 3 \cdot e^{\frac{1}{12} \cdot i\pi}$
$z_2 = 3 \cdot e^{\frac{7}{12} \cdot i\pi}$
$z_3 = 3 \cdot e^{\frac{13}{12} \cdot i\pi}$
$z_4 = 3 \cdot e^{\frac{19}{12} \cdot i\pi}$

Aufgabe 3

a) Vermutung 1 für das n-te Glied $a_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{a_{n-1}}}$
Vermutung 2 für das n-te Glied $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1))}$
Beide führen zu den Gliedern $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = \frac{1}{56}$ und $a_8 = \frac{1}{72}$.

b) Dass die Reihe divergiert ist plausibel wegen $\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \approx \lim\limits_{N \to \infty} \int\limits_{n=\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{n} \mathrm{d}n = \lim\limits_{N \to \infty} \ln(N + \frac{1}{2}) - \ln \frac{1}{2} = \infty$.

Da dies aber kein mathematischer Beweis ist, sei folgender Widerspruchsbeweis angeführt:

Nehmen wir an, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert. Dann müsste es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N geben, sodass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt. Prüfen wir dies exemplarisch für $\varepsilon = 1$ und nehmen an, es gäbe ein N, sodass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Da die linke Summe mit jedem Glied größer wird, gilt $\sum\limits_{n=1}^{(N+1)^2} \frac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, weshalb gelten müsste:

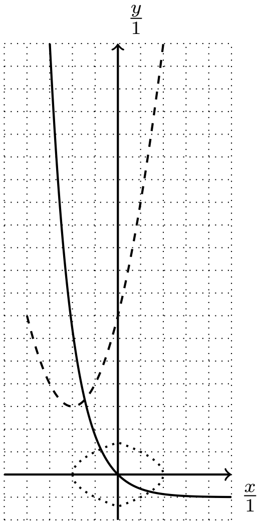
$$\sum_{n=1}^{(N+1)^2} \frac{1}{n} < 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{(N+1)^2} \frac{1}{n} < 1$$

Gesucht ist nun ein verlässliche untere Grenze für den linken Term:

$$\sum_{n=N+1}^{(N+1)^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{N+1} + \sum_{n=N+2}^{(N+1)^2} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{N+1} + \sum_{n=N+2}^{(N+1)^2} \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{1}{N+1} + \frac{(N+1)^2 - (N+2) + 1}{(N+1)^2} = 1$$

Damit ist gezeigt, dass spätestens für $(N+1)^2$ die ε-Umgebung überschritten wird. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und beweist, dass die Reihe nicht konvergiert. Folglich muss sie divergieren.

Aufgabe 4



a) Abbildung (durchgezogen) ist eindeutig, Umkehrfunktion ist: $x = \ln(y+1)$

b) Abbildung (gepunktet) ist nicht eindeutig und auch nicht umkehrbar

c) Abbildung (gestrichelt) ist eindeutig, aber nicht umkehrbar

d) Abbildung (gestrichelt) ist eindeutig, Umkehrfunktion ist: $x = \sqrt{y-3} - 2$

Aufgabe 5

Die Funktion $y = 3\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ ist beispielsweise im Intervall $[0; \frac{1}{2}]$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion in diesem Intervall ist $x = \frac{\pi + 2\arcsin(\frac{y+1}{3})}{4\pi}$. Der Wertebereich der y-Funktion ist $[-4; 2]$, der der x-Funktion ist $[0; \frac{1}{2}]$.