Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 30.10.2012
Funktionen und Ableitung

Aufgabe 1

$n(x) = n_0 \cdot e^{-k\cdot x} = \frac{1}{2}n_0$
$\Rightarrow 2 = e^{k\cdot x}$
$\Rightarrow \ln 2 = k \cdot x$
$\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{x} = \frac{\ln 2}{7\mathrm{d}}$

$n(x) = n_0 \cdot e^{-k\cdot x} = 5\%\ n_0$
$\Rightarrow 20 = e^{k\cdot x}$
$\Rightarrow x = \frac{\ln 20}{k} = \frac{\ln 20}{\frac{\ln 2}{7\mathrm{d}}} = 7\mathrm{d} \cdot \frac{\ln 20}{\ln 2} \approx \underline{\underline{30\mathrm{d}}}$

Aufgabe 2

$\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{D}_h = \underline{\underline{\mathbb{R}\backslash\{0\}}}$

Aufgabe 3

a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x^2\cdot e^x)}{\mathrm{d}x} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \underline{\underline{e^x \cdot (x^2 + 2x)}}$

b) $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3\cdot e^{2x}}{e^x-1}\right) = \frac{e^{2x}\cdot(2x^3+3x^2)}{e^x-1} - \frac{x^3\cdot e^{3x}}{(e^x-1)^2} = \frac{x^3\cdot e^{3x}-2x^3\cdot e^{2x}+3x^2\cdot e^{3x}-3x^2\cdot e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2\cdot e^{2x}}{(e^x-1)^2}\cdot(xe^x - 2x + 3e^x - 3)}}$

c) $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{3x^2-6x+3}}{\mathrm{d}x} = \underline{\underline{\frac{6x-6}{\sqrt{3x^2-6x+3}}}}$

Aufgabe 4 – falscher Ansatz

$\frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi r(r+h)} = \frac{\pi(\frac{d}{2})^2 h}{\pi d(\frac{d}{2}+h)} = \frac{(\frac{d}{2})^2 h}{d(\frac{d}{2}+h)} = \frac{\frac{d}{4}h}{\frac{d}{2}+h} = \frac{dh}{2d+4h}$
Um das Extremum zu bestimmen, muss nach der gesuchten Größe $x = \frac{h}{d}$ abgeleitet werden:
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{dh}{2d+4h}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{d\cdot(x\cdot d)}{2d+4(x\cdot d)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x\cdot d}{2+4x}\right) = \frac{d\cdot(2+4x)-4\cdot x\cdot d}{(2+4x)^2}$
$\Rightarrow 0 = d \cdot (2 + 4x) - 4 \cdot x \cdot d$
$\Rightarrow d = 0$
Dieses Ergebnis ist offensichtlich nicht richtig. Nach langem Überlegen bin ich zu dem Ergebnis gekommen, dass der Fehler darin bestand, beim Ableiten d als Konstante zu betrachten.

Aufgabe 4 – richtiger Ansatz

Tatsächlich ist A konstant. Eine Rechnung, die dies berücksichtigt, ist folgende:
$V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \pi\frac{d^2}{4}\left(\frac{A}{\pi d} - \frac{d}{2}\right) = \frac{dA}{4} - \frac{\pi d^3}{8}$
$0 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}d} = \frac{A}{4} - \frac{3\pi d^2}{8} = \frac{2A-3\pi d^2}{8} = \frac{\pi d(d+2h)-3\pi d^2}{8} = \frac{\pi d^2+2\pi dh-3\pi d^2}{8} = \frac{\pi dh-\pi d^2}{4} = \frac{\pi d}{4}\cdot(h-d)$
$\Rightarrow d = h$ bzw. $\underline{\underline{h : d = 1 : 1}}$

Dass tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt, ergibt sich daraus, dass die zweite Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}d^2} = -\frac{6\pi d}{8}$ für alle denkbaren d ($d > 0$) negativ ist. Dass es keine Randmaxima gibt, folgt aus der Überlegung, dass $\lim\limits_{d\to 0}\frac{d^2h}{4} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{d^2h}{4} = 0$.

Die optimale Konservendose hat also eine Höhe, die ihrem Durchmesser entspricht.