Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 09.01.2013
Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = \underline{\underline{30}}$

b) $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\theta \\ \sin\alpha \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}^2 &= (\cos\alpha \cdot \cos\theta)^2 + (\sin\alpha \cdot \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \cdot \cos^2\theta + \sin^2\theta = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

c) $\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = -\cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \underline{\underline{0}}$

Aufgabe 2

a) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}}$

b) $$\begin{aligned} A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A &= \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}}} \\ = A \cdot (A \cdot A) &= \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} A \cdot A \cdot A \cdot A = (A \cdot A \cdot A) \cdot A &= \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}} \\ = A \cdot (A \cdot A \cdot A) &= \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}} \\ = (A \cdot A) \cdot (A \cdot A) &= \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) $\begin{pmatrix} 2&-3&1 \\ 1&5&4 \\ 0&2&1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2&-3&1 \\ 1&5&4 \\ 0&2&1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3&-5&17 \\ 1&-2&7 \\ -2&4&-13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot3+(-5)\cdot(-2)+17\cdot1 \\ 1\cdot3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot1 \\ -2\cdot3+4\cdot(-2)+(-13)\cdot1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 36 \\ 14 \\ -27 \end{pmatrix}}}$

b) $\begin{vmatrix} 2&-3&1 \\ 1&5&4 \\ 0&2&1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (5 \cdot 1 - 4 \cdot 2) - 1 \cdot (-3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 0 = \underline{\underline{-1}}$

Aufgabe 4

a) $\operatorname{grad}(\ \exp(-a \cdot (x^2 + y^2))\ ) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2ax \cdot \exp(-a \cdot (x^2+y^2)) \\ -2ay \cdot \exp(-a \cdot (x^2+y^2)) \\ 0 \end{pmatrix}}}$

b) $$\begin{aligned} \operatorname{div}(\ \exp(-a \cdot (x^2 + y^2))\ ) &= 2a \cdot (2ax^2 - 1) \cdot \exp(-a \cdot (x^2 + y^2)) \quad + \quad 2a \cdot (2ay^2 - 1) \cdot \exp(-a \cdot (x^2 + y^2)) \\ &= \underline{\underline{4a \cdot (a \cdot (x^2 + y^2) - 1) \cdot \exp(-a \cdot (x^2 + y^2))}} \end{aligned}$$

c)