Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 4)
„Mathematik für Chemiker“
Aufgaben zum 05.12.2012
Mehrfache Integration

Aufgabe 1

a) $\int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 x^2 \cdot e^y \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x^2 \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right) \mathrm{d}x = \left(e - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right)}}$

b) $\int\limits_1^2 \int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 x^2 \cdot y \cdot e^{y \cdot z} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z = \int\limits_1^2 \int\limits_0^2 \frac{2}{3} \cdot y \cdot e^{y \cdot z} \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{3} \frac{y-1}{z} \cdot e^{y \cdot z} \Big|_{y=0}^{y=2} \right) \mathrm{d}z = \frac{2}{3} \int\limits_1^2 \frac{e^{2z}+1}{z} \mathrm{d}z = \frac{2}{3} \int\limits_1^2 \frac{e^{2z}}{z} + \frac{1}{z} \mathrm{d}z$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \frac{(2z)^k}{z} \right) + \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \frac{2}{3} \int\limits_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{k!} \cdot z^{k-1} \right) + \frac{2}{z} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{k \cdot k!} \cdot z^k \right) + 2 \ln z \Big|_1^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2^k}{k \cdot k!} \cdot z^k \right) \Big|_1^2 + \frac{4}{3} \ln 2$$

$$\approx 11.778243 - 2.455914 + \frac{4}{3} \ln 2 \approx \underline{\underline{10.246525}}$$

c) $\int\limits_0^\pi \int\limits_y^\pi e^y \cdot \sin x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int\limits_0^\pi \left(-e^y \cdot \cos x \Big|_{x=y}^{x=\pi} \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^\pi e^y + e^y \cdot \cos y \; \mathrm{d}y$

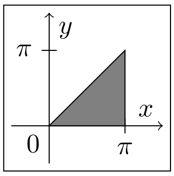
Nebenrechnung:
$\int e^y \cdot \cos y \; \mathrm{d}y = e^y \cdot \sin y - \int e^y \cdot \sin y \; \mathrm{d}y = e^y \cdot \sin y - (-e^y \cdot \cos y - \int -e^y \cdot \cos y) \; \mathrm{d}y$
$\Rightarrow \int e^y \cdot \cos y \; \mathrm{d}y = e^y \cdot \frac{\sin y + \cos y}{2}$

$\int\limits_0^\pi \int\limits_y^\pi e^y \cdot \sin x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = e^y + e^y \cdot \frac{\sin y + \cos y}{2}\Big|_0^\pi = \underline{\underline{\frac{e^\pi - 3}{2}}}$

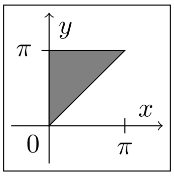
d) $\int\limits_0^\pi \int\limits_x^\pi e^y \cdot \sin x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \left(e^y \cdot \sin x \Big|_{y=x}^{y=\pi} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi (e^\pi - e^x) \cdot \sin x \; \mathrm{d}x$

Analog zu oben gilt: $\int e^x \cdot \sin x \; \mathrm{d}x = e^x \cdot \frac{\sin x - \cos x}{2}$

$\int\limits_0^\pi \int\limits_x^\pi e^y \cdot \sin x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x = -e^\pi \cdot \cos x - e^x \cdot \frac{\sin x - \cos x}{2}\Big|_0^\pi = \underline{\underline{\frac{3e^\pi + 1}{2}}}$



Skizze c)



Skizze d)

Aufgabe 2

Da sich ein Strahl entlang der x- und der andere entlang der y-Achse bewegt, gilt für die Länge der Kreissehne s in einer bestimmten Höhe z für beide Strahlen gleichermaßen: $s = 2\sqrt{r^2 - z^2}$. Aufgrund der Randbedingungen schneiden sich die Strahlen auf dieser Höhe z in einem Quadrat der Seitenlänge s. Das Volumen erhält man durch Integration über alle s:

$$V = \int\limits_{-r}^{r} s^2(z) \; \mathrm{d}z = \int\limits_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z = 4 \int\limits_{-r}^{r} r^2 - z^2 \mathrm{d}z = 4 \cdot \left(r^2 \cdot z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{+r} = \underline{\underline{\frac{16}{3} r^3}}$$

Aufgabe 3 – quick'n'dirty

a) $\int\limits_{C_1} (x \cdot y \cdot \mathrm{d}x - y^2 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}y) = \int\limits_0^1 (-y^2 \cdot e^0 \cdot \mathrm{d}y) + \int\limits_0^1 (x \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

b) $\int\limits_{C_2} (x \cdot y \cdot \mathrm{d}x - y^2 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}y) = \int\limits_0^1 (x \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x) + \int\limits_0^1 (-y^2 \cdot e^1 \cdot \mathrm{d}y) = 0\Big|_0^1 - \frac{e \cdot y^3}{3}\Big|_0^1 = \underline{\underline{-\frac{e}{3}}}$

c) $\int\limits_{C_3} (x \cdot y \cdot \mathrm{d}x - y^2 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}y) = \int\limits_0^1 (u \cdot u \cdot \mathrm{d}u - u^2 \cdot e^u \cdot \mathrm{d}u) = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 - (u^2 - 2u + 2) \cdot e^u\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{7}{3} - e}}$