

# E 11a „Phasenbeziehungen und RC-Filter“

Toshiki Ishii (Matrikel 3266690)

17.06.2013

Studiengang Chemie (Bachelor of Science)

## Aufgabenstellung

1. Ermitteln des Phasenverlaufes zwischen Strom und Spannung mithilfe von LISSAJOUS-Figuren für eine RC-, RL- und RLC-Schaltung als Funktion der Frequenz.
2. Graphische Darstellung des Phasenwinkels als Funktion der Frequenz.  
Diskussion des Graphenverlaufs.
3. Messung des OHMSchen Widerstandes der Spule und Berechnung der Induktivität der Spule durch Fit der Theoriekurve an die Daten der RL-Schaltung.  
Messung der Resonanzfrequenz der RLC-Schaltung und Berechnung der Induktivität der Spule.

## Zubehör

- Frequenzgenerator
- Schaltbrett mit Kondensator, Spule und OHMSchem Widerstand
- Analoges Oszilloskop
- Digitalmultimeter
- Kabel

## Grundlagen

### Aufbau und Funktion eines Oszilloskops

Ein Oszilloskop ist ein Gerät zur optischen Darstellung des zeitlichen Verlaufs einer Spannung. Es besteht aus einem WEHNELT-Zylinder mit einer Glühkathode. Die Glühkathode wird durch Anlegen einer elektrischen Spannung geheizt, sodass Elektronen aus dem Kathodenmaterial freierwerden (thermische Ionisation). Die Elektronen werden von einer zweiten Spannung beschleunigt und dabei zwecks Fokussierung durch eine Lochanode gelenkt. In zwei Plattenkondensatoren werden sie mit einer Ablenkspannung vertikal und horizontal abgelenkt und treffen dann auf einen Leuchtschirm.

Meist wird auf der  $x$ -Achse die Zeit dargestellt. Dies wird durch Anlegen einer Sägezahnspannung erreicht, die den Strahl mit konstanter Geschwindigkeit entlang der  $x$ -Achse führt und bei Erreichen des rechten Randes wieder an den linken Rand positioniert. Auf der  $y$ -Achse wird eine Spannung dargestellt.

### Lissajous-Figuren und Phasenverschiebung

LISSAJOUS-Figuren entstehen, wenn der Elektronenstrahl der Oszilloskops sowohl auf der  $x$ - als auch auf der  $y$ -Achse durch eine sinusförmige Wechselspannung abgelenkt wird, wobei die beiden Wechselspannungen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zueinander stehen müssen. Dann ergibt sich auf dem Oszilloskop eine statische Figur, deren Aussehen vom Frequenzverhältnis und der Phasenverschiebung der Wechselspannungen abhängig ist. Für ein Verhältnis von 1 : 1 ist dies eine Ellipse. Für den Sonderfall  $\Delta\varphi = k \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ergibt sich eine Gerade und für  $\Delta\varphi = (k + \frac{1}{2}) \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\frac{U_x}{a_x} = \frac{U_y}{a_y}$  ein Kreis. Aus der Form der Ellipse lässt die Phasenverschiebung bestimmen:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe die Spannung  $u_x$  eine Phase von  $0^\circ$ . Dann gilt für die beiden auf dem Oszilloskop dargestellten Spannungen

$$\begin{aligned}u_x &= \hat{u}_x \cdot \sin(\omega \cdot t) \\u_y &= \hat{u}_y \cdot \sin(\omega \cdot t + \Delta\varphi)\end{aligned}$$

Für  $u_x = 0$  gilt dann

$$\begin{aligned}0 &= \sin(\omega \cdot t) \\ \omega \cdot t &= k \cdot \pi\end{aligned}$$

mit einer ganzen Zahl  $k$ , sodass

$$\begin{aligned}u_y(u_x = 0) &= \hat{u}_y \cdot \sin(k \cdot \pi + \Delta\varphi) \\u_y(u_x = 0) &= \pm \hat{u}_y \cdot \sin(\Delta\varphi) \\ \Delta\varphi &= \pm \arcsin \frac{u_y(u_x = 0)}{\hat{u}_y}\end{aligned}$$

Dabei ist das Verhältnis zwischen momentaner Spannung und Spitzenspannung gleich dem Verhältnis zwischen momentaner Auslenkung am Oszilloskop und maximaler Auslenkung am Oszilloskop, sodass

$$\Delta\varphi = \pm \arcsin \frac{y_0}{b}$$

Analog ergibt sich

$$\Delta\varphi = \pm \arcsin \frac{x_0}{a}$$

Das Vorzeichen der Phasenverschiebung kann nicht aus dem Bild am Oszilloskop abgelesen werden, sondern muss logisch erschlossen werden.

### Kapazitiver Widerstand

Ein kapazitiver Widerstand (Kondensator) baut in einem Stromkreis ein elektrisches Feld auf und setzt deshalb der angelegten Spannung zeitverzögert eine Spannung entgegen. In einem Gleichstromkreis wird der Kondensator aufgeladen und erreicht im stationären Zustand eine maximale Ladung, ab der er einen unendlichen hohen Widerstand darstellt. In einem Wechselstromkreis reicht dagegen die Zeit nicht zur vollständigen Aufladung des Kondensators aus, sodass sein Widerstand mit der Frequenz sinkt. Für den Widerstand  $X_C$  eines Kondensators mit der Kapazität  $C$  in einem Wechselstromkreis mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gilt

$$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$$

Bei Anlegen einer sinusförmigen Wechselspannung wird der Kondensator mit steigender Spannung zunächst stärker aufgeladen. Nach Überschreiten der Spitzenspannung fängt der Kondensator dann bereits wieder an, sich zu entladen, sodass ein Strom fließt, der der momentanen Spannung entgegengerichtet ist. Kehren sich dann die Pole um, so wird der Kondensator wieder aufgeladen. In diesem Punkt fließt bei einem reinen kapazitiven Widerstand der maximale Strom, denn mit steigender Kondensatorladung reicht die (obwohl steigende) Spannung nicht mehr aus, um die große Ladung zu bewegen. Dies erklärt die negative Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung – in anderen Worten: der Strom eilt der Spannung voraus. Die Phasenverschiebung der Stromes gegenüber der Spannung ist für einen idealen Kondensator  $-90^\circ$ , daher kommt auch das negative Vorzeichen für den Blindwiderstand.

Die Gesamtkapazität  $C$  einer Parallelschaltung zweier Kondensatoren der Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  ergibt sich nach

$$C = C_1 + C_2 ,$$

die einer Serienschaltung nach

$$C = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1}$$

### Induktiver Widerstand

Ein induktiver Widerstand (Spule) baut in einem Stromkreis ein magnetisches Feld auf und verhindert auf diese Weise eine schnelle Änderung des Stromes. In einem Gleichstromkreis stellt die ideale Spule nach dem Aufbau des Magnetfeldes (stationärer Zustand) keinen Widerstand mehr dar. In einem Wechselstromkreis stellt die Spule dagegen ständig einen Widerstand dar, indem sie durch das ständige Auf- und Abbauen des Magnetfeldes den Stromfluss begrenzt. Für den Widerstand  $X_L$  einer Spule mit der Induktivität  $L$  in einem Wechselstromkreis mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gilt

$$X_L = \omega \cdot L$$

Bei einer Spule führt das Anlegen einer Spannung nicht sofort zu einem Stromfluss, sondern zunächst zum Aufbau eines Magnetfeldes. Erst wenn dieses stark genug ist, kommt es zu einem größeren Stromfluss. Die Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung ist für eine ideale Spule  $+90^\circ$ .

Die Gesamtinduktivität  $L$  einer Parallelschaltung zweier Spulen der Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  ergibt sich nach

$$L = (L_1^{-1} + L_2^{-1})^{-1} ,$$

die einer Serienschaltung nach

$$L = L_1 + L_2$$

### Ortskurvendarstellung in der komplexen Zahlenebene

Um mit Wechselstromwiderständen einfacher rechnen zu können, wurde die komplexe Wechselstromrechnung eingeführt. Wechselstromwiderstände werden dabei als komplexe Zahlen dargestellt, wobei sich der Realteil ( $x$ -Achse) aus den OHMSchen Widerständen und der Imaginärteil ( $y$ -Achse) sich aus den kapazitiven sowie induktiven Widerständen zusammensetzt. Die Impedanz (Gesamtwiderstand im Wechselstromkreis) ist dann der Betrag der komplexen Zahl.

### RC-, RL-, RLC-Reihenschaltung, Frequenzabhängigkeit des Widerstandes und des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung

In einer Reihenschaltung von OHMSchem Widerstand, Spule und Kondensator ergibt sich die komplexe Impedanz nach:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X$$

mit

$$\begin{aligned} X &= X_L + X_C \\ &= \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \end{aligned}$$

Die Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung ist der Winkel zwischen der Impedanz und der realen Achse in der komplexen Zahlenebene. In trigonometrischen Beziehungen bedeutet dies

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{X}{R} \\ &= \arcsin \frac{X}{Z} \end{aligned}$$

Für eine RLC-Schaltung bedeutet dies

$$\varphi = \arctan \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R},$$

für eine reine RC-Schaltung

$$\varphi = -\arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

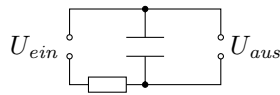
und für eine reine RL-Schaltung

$$\varphi = \arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$$

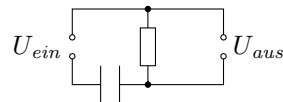
### Hoch- und Tiefpass, Frequenzverhalten, Übertragungsfunktion

Hoch- und Tiefpassfilter werden eingesetzt, um Spannungen zu filtern. Beide bestehen im einfachsten Fall aus ein Kondensator und einem OHMSchen Widerstand, die in Reihe zu einer Eingangsspannung geschaltet sind.

Spannung am Kondensator und am OHMSchen Widerstand verhalten sich unterschiedlich in Abhängigkeit von der Frequenz eines Wechselstromes. Für niedrige Frequenzen lädt sich der Kondensator merklich auf und erhält dadurch einen hohen Blindwiderstand, sodass für niedrige Frequenzen hauptsächlich ein Spannungsabfall am Kondensator auftritt. Für hohe Frequenzen stellt der Kondensator dagegen keinen großen Widerstand dar, sodass der Spannungsabfall hauptsächlich am OHMSchen Widerstand auftritt. Wird nun die Spannung über dem Kondensator abgegriffen, so werden auf diese Weise die hohen Frequenzen herausgefiltert (Tiefpass), die über dem Kondensator kaum einen Spannungsabfall bewirken. Wird dagegen die Spannung über dem OHMSchen Widerstand abgegriffen, so werden die tiefen Frequenzen herausgefiltert, die hohen bleiben erhalten (Hochpass).



Tiefpass



Hochpass

Entscheidend für das Verhältnis der abgegriffenen Spannung zur angelegten Spannung ist die Impedanz:

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{Z_i}{Z_{ges}}$$

Wird nun die Spannung am Kondensator abgegriffen, so ergibt sich:

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{Z_C}{Z_{ges}}$$

Die Impedanz des Kondensators ist hauptsächlich sein Blindwiderstand  $X_C$ , die Gesamtimpedanz ergibt sich aus Blind- und OHMSchem Widerstand:

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{Z_C}{\sqrt{X_C^2 + R^2}}$$

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 \cdot C^2} + R^2}}$$

Daraus ergibt sich, dass für hohe Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty$ ) das Verhältnis zwischen abgegriffener Spannung zu angelegter Spannung sehr klein wird, für niedrige Frequenzen dagegen gegen 1 strebt. Im Fall eines Abgriffs über dem OHMSchen Widerstand sieht es genau anders herum aus, denn dort gilt

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 \cdot C^2} + R^2}}$$

sodass für hohe Frequenzen die abgegriffene Spannung gleich der angelegten ist. Für niedrige Frequenzen dagegen wird der Nenner sehr groß, sodass das Verhältnis zwischen  $U_{aus}$  und  $U_{ein}$  sehr klein wird.

## Messwerte

$\frac{f}{\text{kHz}}$	$\frac{y_0(\text{RC})}{\text{cm}}$	$\frac{f}{\text{kHz}}$	$\frac{y_0(\text{RL})}{\text{cm}}$	$\frac{f}{\text{kHz}}$	$\frac{y_0(\text{RLC})}{\text{cm}}$
0,2000	3,90	0,2000	0,23	0,2000	3,88
0,3000	3,78	0,3000	0,30	0,3000	3,78
0,4500	3,55	0,4500	0,40	0,4500	3,50
0,700	3,12	0,700	0,55	0,700	3,00
1,000	2,61	1,000	0,72	1,000	2,38
1,400	2,18	1,400	0,93	1,400	1,58
2,000	1,64	2,000	1,28	2,000	0,60
3,000	1,15	3,000	1,73	3,000	0,75
3,800	0,93	3,800	2,10	3,800	1,40
4,500	0,80	4,500	2,32	4,500	1,82
7,00	0,52	7,00	2,90	7,00	2,79
10,00	0,38	10,00	3,35	10,00	3,35
14,00	0,28	14,00	3,60	14,00	3,65
17,00	0,22	17,00	3,70	17,00	3,78
20,00	0,20	20,00	3,78	20,00	3,85

Die Kapazität des Kondensators ist mit

$$C = (0,998 \pm 0,005) \mu\text{F}$$

angegeben.

Die Resonanzfrequenz der RLC-Schaltung wurde mit

$$f_R = (2386 \pm 3) \text{ kHz}$$

bestimmt.

Der OHMSche Widerstand der Spule beträgt

$$R_L = 6,4 \Omega ,$$

der des OHMSchen Widerstandes

$$R_L = 179,5 \Omega .$$

Beide Werte wurden mit einem Digitalmultimeter gemessen.

## Auswertung

### Auswertung – Teil 1

Wie in der Vorbereitung hergeleitet, gilt

$$\Delta\varphi = \pm \arcsin \frac{y_0}{b}$$

Da die Phasenverschiebung der RC-Schaltung immer negativ, die der RL-Schaltung immer positiv ist und außerdem für die RLC-Schaltung die Resonanzfrequenz bestimmt wird, ist die Wahl des Vorzeichens relativ offensichtlich. Aus den Messdaten ergeben sich folgende Phasenverschiebungen:

$\frac{f}{\text{kHz}}$	$\varphi(\text{RC})$	$\varphi(\text{RL})$	$\varphi(\text{RLC})$
0,2000	-77,2	3,3	-75,9
0,3000	-70,9	4,3	-70,9
0,4500	-62,6	5,7	-61,0
0,700	-51,3	7,9	-48,6
1,000	-40,7	10,4	-36,5
1,400	-33,0	13,4	-23,3
2,000	-24,2	18,7	-8,6
3,000	-16,7	25,6	10,8
3,800	-13,4	31,7	20,5
4,500	-11,5	35,5	27,1
7,00	-7,5	46,5	44,2
10,00	-5,5	56,9	56,9
14,00	-4,0	64,2	65,9
17,00	-3,2	67,7	70,9
20,00	-2,9	70,9	74,3

### Auswertung – Teil 2

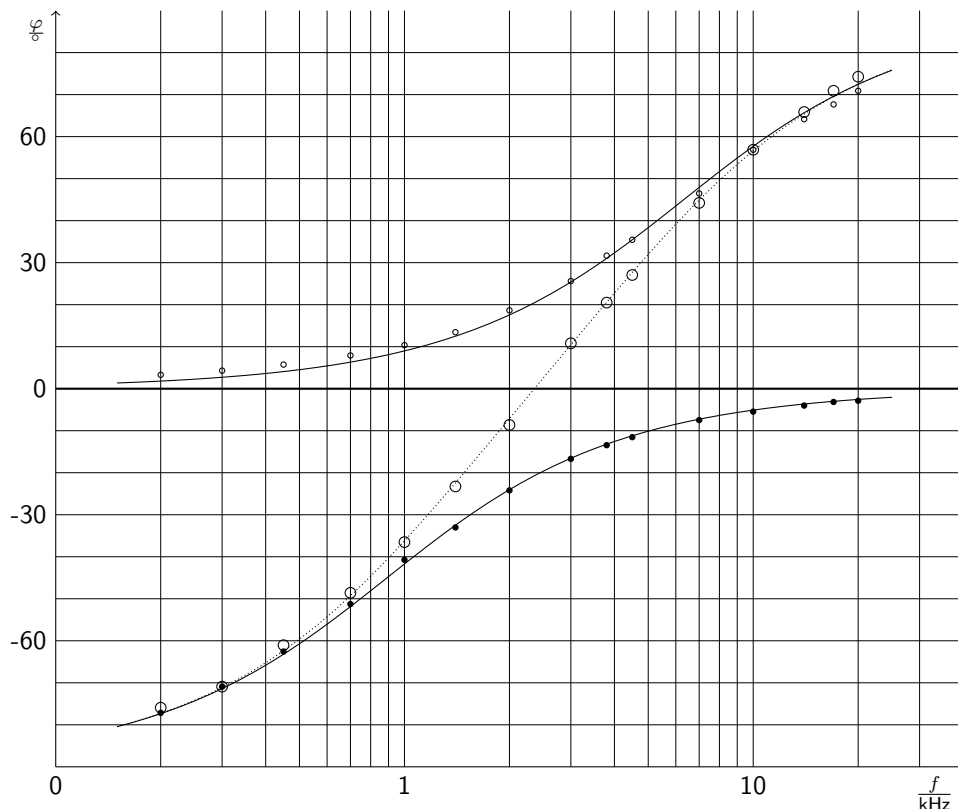
Gemessen wurden die Spannung über dem OHMSchen Widerstand und die Spannung über der Gesamtschaltung. Die momentane Spannung über dem OHMSchen Widerstand ist dabei proportional zum momentanen Strom, sodass die Verschiebung zwischen den beiden Phasen auch die Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der Spannung beschreibt.

Im Diagramm dargestellt sind die aus den Messpunkten berechneten Wertepaare sowie Anpassungen der Form

$$\Delta\varphi = \arctan \left( \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right),$$

wobei für die RC-Kurve  $\omega \cdot L = 0$  und für die RL-Kurve  $-\frac{1}{\omega \cdot C} = 0$  angesetzt wurde. Der Parameter  $R = 179,5 \Omega$  wurde als konstant festgelegt. Die Parameter der Kurven nach Fitten in der dargestellten logarithmierten Form sind

Schaltung	Darstellung	$\frac{C}{\text{nF}}$	$\frac{L}{\text{mH}}$
RC	ausgefüllte Kreise	$1003 \pm 7$	$\div$
RL	kleine Kreisringe	$\div$	$4,53 \pm 0,08$
RLC	große Kreisringe	$993 \pm 16$	$4,59 \pm 0,07$



**RC-Schaltung** Für niedrige Frequenzen ist der kapazitive Widerstand groß, sodass die Phasenverschiebung in der Nähe von  $-90^\circ$  liegt. Mit steigender Frequenz sinkt der kapazitive Anteil gegenüber dem gleichbleibenden OHMSchen Anteil. Bei 0,89 kHz sind kapazitiver und OHMScher Anteil gleich, sodass eine Phasenverschiebung von  $-45^\circ$  erreicht wird. Mit weiter steigender Frequenz verschwindet der kapazitive Anteil, sodass sich die Phasenverschiebung den für einen OHMSchen Widerstand zu erwartenden  $0^\circ$  annähert.

**RL-Schaltung** Bei niedrigen Frequenzen spielt der induktive Widerstand kaum eine Rolle. Der OHMSche Widerstand dominiert und die Phasenverschiebung beträgt annähernd  $0^\circ$ . Erst bei höheren Frequenzen wird der induktive Widerstand bedeutend. Bei 6,32 kHz sind OHMScher und induktiver Anteil gleich, die Phasenverschiebung beträgt  $+45^\circ$ . Für größere Frequenzen steigt der induktive Anteil weiter und nähert sich dann für große Frequenzen den  $+90^\circ$  einer idealen Spule an.

**RLC-Schaltung** Für niedrige (hohe) Frequenzen dominiert der kapazitive (induktive) Widerstand, der induktive (kapazitive) ist vernachlässigbar; der Verlauf ist deshalb wie bei der RC-Schaltung (RL-Schaltung). Dazwischen gibt es einen Bereich, in dem beide Widerstände wirken und einander teilweise kompensieren. Bei einer Frequenz von 2,36 kHz kommt es zu einer vollständigen Aufhebung und damit zu einer Phasenverschiebung von  $0^\circ$ .

Anmerkung: Die hier angegebenen Frequenzen wurden aus den Fitkurven ermittelt. Die angegebene Resonanzfrequenz weicht deshalb leicht von der gemessenen ab.



### Auswertung – Teil 3 (Induktivität durch Kurvenanpassung)

Die von *qtiplot* angepassten Werte für die Induktivität sind

$$(4,53 \pm 0,08) \text{ mH}$$

für die RL-Kurve und

$$(4,59 \pm 0,07) \text{ mH}$$

für die RLC-Kurve (siehe Auswertung – Teil 2).

### Auswertung – Teil 3 (Induktivität durch Resonanzfrequenz)

Im Resonanzfall gilt

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ X_L - X_C &= 0 \\ \omega_r \cdot L - \frac{1}{\omega_r \cdot C} &= 0 \\ L &= \frac{1}{\omega_r^2 \cdot C} \\ &= \frac{1}{(2\pi \cdot f_r)^2 \cdot C} \\ &= \frac{1}{(2\pi \cdot 2386 \text{ Hz})^2 \cdot 998 \text{ nF}} \\ &= \underline{\underline{4,458 \text{ mH}}} \end{aligned}$$

### Messunsicherheit

1. Die Messunsicherheit der Frequenz hat die Größenordnung der Anzeigegenauigkeit (drei bis vier signifikante Stellen) und beträgt somit etwa 0,1 %. Sie ist damit wesentlich kleiner als der Ablesefehler am Oszilloskop von etwa 0,03 cm. Bei betragsmäßig kleinen Phasenverschiebungen ( $-30^\circ \dots +30^\circ$ ) liegt der resultierende Gesamtfehler im Bereich von  $\pm 0,3^\circ$ , für größere Phasenverschiebungen wird er jedoch schnell größer und erreicht bei etwa  $70^\circ$  einen Wert von  $\pm 1^\circ$ .

Der geringe OHMSche Anteil der Spule wird vernachlässigt, da jeder Versuch, ihn zu berücksichtigen, zu unsinnigen Werten führt.

3. (a) Der statistische Fehler wird von *qtiplot* angegeben. Hinzu kommt ein systematischer Anteil, dessen Größe nicht genau bestimmt ist.  
(b) Die Unsicherheit der aus der Resonanzfrequenz berechneten Induktivität beträgt:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\omega_r^2 \cdot C} \\ u(L) &= \sqrt{\left(\frac{-2 \cdot u(\omega_r)}{\omega_r^3 \cdot C}\right)^2 + \left(\frac{-u(C)}{\omega_r^2 \cdot C^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 2\pi \cdot \pm 3 \text{ Hz}}{(2\pi \cdot 2386 \text{ Hz})^3 \cdot 9,98 \cdot 10^{-7} \text{ F}}\right)^2 + \left(\frac{\pm 5 \cdot 10^{-9} \text{ F}}{(2\pi \cdot 2386 \text{ Hz})^2 \cdot (9,98 \cdot 10^{-7} \text{ F})^2}\right)^2} \\ &= \underline{\underline{0,025 \text{ mH}}} \end{aligned}$$

## Zusammenfassung

1. (entfällt)

2. Für die RC-Schaltung wurde (quantitativ) die erwartete Kurve gefunden.

Für die RL- und RLC-Schaltung wurde (qualitativ) die erwartete Kurvenform gefunden. Aufgrund der systematischen Abweichungen der Messpunkte von der RL-Fitkurve besteht jedoch der Verdacht, dass die Induktivität der Spule mit steigender Frequenz abnimmt. Dies könnte ein Artefakt sein, da im Experiment für höhere Frequenzen sukzessive die Spannung erhöht wurde, um  $b$  konstant zu halten. Auf diese Weise könnte das Phänomen mit der Hysterese eines Eisenkerns erklärt werden.

3. Die mit den verschiedenen Methoden ermittelten Werte für die Induktivität der Spule sind trotz dieses Umstandes relativ gut miteinander verträglich:

Methode	$\frac{L}{\text{mH}}$
RL-Fit	$(4,53 \pm 0,08) \text{ mH}$
RLC-Fit	$(4,59 \pm 0,07) \text{ mH}$
RLC-Resonanz	$(4,46 \pm 0,03) \text{ mH}$