

M 3a „Ultraschall“

Toshiki Ishii (Matrikel 3266690)

03.06.2013

Studiengang Chemie (Bachelor of Science)

Aufgabenstellung

1. Messung der Schallgeschwindigkeit von Ultraschallwellen

- in Acrylglas bei 1 MHz; 2 MHz; 4 MHz (Reflexion)
- in Acrylglas bei 2 MHz (Transmission)
- in Aluminium bei 2 MHz

Berechnung der Elastizitätsmoduln.

2. Abschätzung des Auflösungsvermögens durch zwei nahe beieinander liegende Störstellen

3. Bestimmung der Lage von Bohrungen mittels Laufzeitmessung des Echos bezüglich zwei gegenüberliegenden Seitenflächen eines Acrylquaders zur Berechnung der Bohrungsdurchmesser

4. Aufnahme eines Ultraschallschnittbildes (Grauwertdarstellung)

5. Bestimmung des Schallschwächungskoeffizienten in Polyacryl bei 2 MHz (Transmission)

Zubehör

- Ultraschallgerät ^GA^{MPT}-Scan
 - Ultraschallgel
 - Sondenhalter
 - Ultraschallsonden (1 MHz; 2 MHz; 2 MHz; 4 MHz)
 - Software
- Acrylglaszylinder ($d = 40 \text{ mm}$, $l = 40,35 \text{ mm}$; $80,70 \text{ mm}$; $122,10 \text{ mm}$)
- Aluminiumblock ($43,90 \text{ mm} \times 29,85 \text{ mm} \times 29,85 \text{ mm}$)
- Acrylglasblock ($15,00 \text{ cm} \times 8,04 \text{ cm} \times 4,14 \text{ cm}$) mit Bohrungen

Grundlagen

Wellen

Eine Welle ist eine periodische Änderung einer Größe. Meist werden periodisch orts- und zeitabhängige Größen als Wellen beschrieben. Es kann unterschieden werden in

- mechanische Wellen, die an ein Medium gebunden sind, und
- andere Formen von Wellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können (elektromagnetische Wellen, Gravitationswellen, ...)

sowie in

- longitudinale Wellen (wie Schallwellen), bei denen die Amplitude parallel zur Ausbreitungsrichtung ist, und
- transversale Wellen (wie Lichtwellen, Schwingung einer Gitarrensaite), bei denen die Amplitude orthogonal auf der Ausbreitungsrichtung steht.

In allen Fällen transportieren Wellen Energie und Impuls, jedoch im zeitlichen Mittel keine Materie.

Für die mathematische Beschreibung sind verschiedene Größen von Bedeutung:

- Die Amplitude \vec{A}_0 gibt die maximale Auslenkung und die Schwingungsrichtung an
- Die Phase φ gibt an, in welchem Abschnitt der Periode sich die Welle zu einer bestimmten Zeit und an einem bestimmten Punkt befindet.
- Die momentane Auslenkung $\vec{A}(\vec{r}, t)$ am Ort \vec{r} zur Zeit t .
- Die Frequenz ν (f) gibt die Anzahl der Perioden pro Zeit an.
- Die Wellenlänge λ gibt an, welchen Raum eine Periode einnimmt.
- Die Phasengeschwindigkeit $c = \lambda \cdot \nu$.

Wellen lassen sich durch die Wellengleichung von D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = 0$$

beschreiben.

Wellen in elastischen Medien

Elastische mechanische Wellen (Schall) entstehen in Flüssigkeiten und Gasen durch zeitliche und räumliche Veränderungen von Druck/Dichte (E_{pot}) und mittlerer Geschwindigkeit (E_{kin}). Druckgradienten führen dabei zu Geschwindigkeitsamplituden, die wiederum zu einer neuen Druckverteilung und einem neuen Gradientenfeld führen. Die Ausbreitung erfolgt als Longitudinalwelle.

Elastische Wellen in Festkörpern können sowohl in Form von Longitudinal- als auch in Form von Transversalwellen auftreten. Die Schallgeschwindigkeit ist dabei vom Elastizitäts- (longitudinal) beziehungsweise Torsionsmodul (transversal) abhängig, sodass für Longitudinal- und Transversalwellen verschiedene Phasengeschwindigkeiten auftreten können.

Elastizitätsmodul

Viele Stoffe reagieren auf eine an ihnen ziehende Kraft F dem HOOKEschen Federgesetz zufolge nach mit einer linearen Verlängerung Δl , sodass

$$F = k \cdot \Delta l$$

Dividiert man beidseitig durch die Fläche A , an der die Kraft angreift, so ergibt sich:

$$\frac{F}{A} = \frac{k \cdot \Delta l}{A} \cdot \frac{l_0}{l_0}$$

mit der (positiven) Zug- oder (negativen) Druckspannung $\sigma = \frac{F}{A}$, der Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ und dem Elastizitätsmodul $E = \frac{k \cdot A}{l_0}$, also:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Der Elastizitätsmodul E gibt also das Verhältnis zwischen der auf einer Festkörper wirkenden Zug- oder Druckspannung σ und der Dehnung ε des Körpers an. Der Zusammenhang gilt nur in einem gewissen Bereich als gute Näherung, beschreibt die Verhältnisse jedoch gut genug, um für die Druckunterschiede bei der Schallausbreitung als Ansatz genutzt werden zu können. Dort gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Intensität einer Welle, Reflexions- und Transmissionsfaktor

Die Intensität einer Welle entspricht der Dichte des Energiestromes. Sie ist proportional zum Quadrat der Amplitude der Welle.

Beim Übergang von einem Medium in ein anderes, können Reflexion und Transmission beobachtet werden. Dabei lässt sich feststellen, dass der Quotient zwischen reflektierter und transmittierter Intensität I konstant ist. Die reflektierte Intensität wird als Reflexionsgrad R , die transmittierte als Transmissionsgrad T bezeichnet.

Das Verhältnis zwischen Amplitude der reflektierten Welle und Amplitude der eingestrahnten Welle wird als Reflexionsfaktor r bezeichnet. Ebenso verhält es sich mit dem Verhältnis zwischen transmittierter und eingestrahelter Amplitude, dem Transmissionsfaktor t .

Prinzip von Fermat

Das FERMATsche Prinzip besagt, dass eine Welle zwischen zwei Punkten immer den Weg wählt, bei dem die Phase gegenüber kleinen Modifikationen im Weg stationär ist. Dies ist der (zeitlich) kürzeste Weg.

Reflexions- und Brechungsgesetz

Das Reflexionsgesetz besagt, dass bei Reflexion einer Welle an einer Fläche der Winkel α zwischen einfallendem Strahl und der Flächennormalen gleich dem Winkel β zwischen reflektiertem Strahl und der Flächennormalen ist:

$$\alpha = \beta$$

Beim Übergang zwischen zwei Medien (Transmission) verhält es sich komplizierter. Grundlegende Eigenschaft eines Mediums ist der Brechungsindex n , der das Verhältnis zwischen Phasengeschwindigkeit im Vakuum und

Phasengeschwindigkeit im Medium beschreibt. Beim Übergang zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex ändert sich die Phasengeschwindigkeit c . Es kommt deshalb zu Stauchung (Übergang in ein optisch dichteres Medium) oder Streckung (Übergang in ein optisch weniger dichtes Medium) der Lichtwellen. Dies führt bei nicht-senkrechttem Einfall zu folgender Beziehung zwischen Einfallswinkel δ_1 und Winkel δ_2 des gebrochenen Strahls:

$$n_1 \cdot \sin \delta_1 = n_2 \cdot \sin \delta_2$$

Dieser Zusammenhang wird als SNELLIUSSches Brechungsgesetz bezeichnet.

Absorption

Durch Wechselwirkung zwischen Welle und Medium kommt es zur Schwächung der Intensität I einer Welle. Die differentielle Schwächung ist dabei proportional zur Intensität und dem differentiellen Weg, folgt also dem LAMBERT-BEERSchen Gesetz

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

beziehungsweise

$$A = \lg \frac{I_0}{I} = \mu \cdot x$$

mit dem Absorptionskoeffizienten μ .

Messwerte

1. Körper	$\frac{T_{r,1\text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{r,2\text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{r,4\text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{t,2\text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$
III 1	31,2	30,6	29,9	16,6
	60,9			45,6
	90,5			75,1
III 2	60,5	59,6	59,0	30,6
	59,9			31,0
III 3	92,1	91,1	÷	46,4
				46,7

Kantenlänge	$\frac{T_1}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_2}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_3}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_4}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_5}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_6}{\mu\text{s}}$
43,90 mm	15,3	29,2	43,0	56,8	70,7	÷
29,85 mm	10,7	20,2	29,5	38,9	48,3	57,7

2. $\frac{\nu}{\text{MHz}}$	$\frac{T_1}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_2}{\mu\text{s}}$
1	÷	÷
2	13,9	15,4
4	13,5	14,9

3. Bohrung	$\frac{T_1}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_2}{\mu\text{s}}$
1	45,5	10,9
2	40,2	17,0
3	34,8	23,3
4	29,3	29,3
5	23,5	35,1
6	17,7	41,2
7	12,0	46,8
8	6,2	÷
9	41,4	12,4
÷	59,5	59,5

5. Messung mit den 2 MHz-Sonden (Transmission):

Körper	$\frac{T}{\mu\text{s}}$	$\frac{U}{V}$
III 1	16,0	0,515
III 2	30,6	0,390
III 3	46,2	0,258

Auswertung

1. Bei einer Reflexion wird der Probekörper in einer Dimension zweimal durchlaufen. Die Kantenlänge muss also vor der Datenauswertung angepasst werden. Peaks mit annähernd doppelter (dreifacher, ...) Laufzeit kommen durch vierfaches (sechsfaches, ...) Durchlaufen des Körpers zustande.

Bei einfacher Transmission wird der Probekörper in einer Dimension dagegen nur einmal durchlaufen. Subsequente Peaks erfolgen durch dreifaches (fünffaches, ...) Durchlaufen des Körpers.

Berücksichtigung all dieser Gegebenheiten führt zu folgenden Daten:

s	$\frac{T_{r,1 \text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{r,2 \text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{r,4 \text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$	$\frac{T_{t,2 \text{ MHz}}}{\mu\text{s}}$
40,35 mm				16,6
80,70 mm	31,2	30,6	29,9	
121,10 mm				45,6
161,40 mm	60,9			
201,75 mm				75,1
242,10 mm	90,5			
80,35 mm				30,6
80,35 mm				31,0
160,70 mm	60,5	59,6	59,0	
160,70 mm	59,9			
122,10 mm				46,4
122,10 mm				46,7
244,20 mm	92,1	91,1		

Fitten von Geraden der Form

$$T(s) = \frac{1}{c} \cdot s + t_0$$

an die jeweiligen Spalten liefert folgende Werte:

Material	Modus	ν	c	t_0
Acryl	Reflexion	1 MHz	$(2695 \pm 26) \text{ m s}^{-1}$	$(0,93 \pm 0,65) \mu\text{s}$
Acryl	Reflexion	2 MHz	$(2702 \pm 31) \text{ m s}^{-1}$	$(0,53 \pm 0,75) \mu\text{s}$
Acryl	Reflexion	4 MHz	2749 m s^{-1}	$0,55 \mu\text{s}$
Acryl	Transmission	2 MHz	$(2748 \pm 20) \text{ m s}^{-1}$	$(1,78 \pm 0,31) \mu\text{s}$
Aluminium	Reflexion	2 MHz	$(6341 \pm 12) \text{ m s}^{-1}$	$(1,36 \pm 0,08) \mu\text{s}$

In Folgemessungen wurde Acryl mit 2 MHz-Wellen gemessen. Es wird im folgenden von einer Schallgeschwindigkeit von $(2735 \pm 17) \text{ m s}^{-1}$ ausgegangen (Begründung in der Betrachtung der Messunsicherheiten).

Der Elastizitätsmodul errechnet sich nach

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$E = c^2 \cdot \rho$$

und beträgt damit für Acryl

$$= (2735 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 1180 \text{ kg m}^{-3}$$

$$= 8,83 \text{ GPa}$$

und für Aluminium

$$\begin{aligned} &= (6341 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 2700 \text{ kg m}^{-3} \\ &= 108,56 \text{ GPa} \end{aligned}$$

2. Aus den Laufzeitdifferenzen für die beiden Bohrungen ergibt sich ein Abstand von

$$\begin{aligned} \Delta s &= c \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ \Delta s &= 2735 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{1,45 \mu\text{s}}{2} \\ &= 2,0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dieser Abstand wird von der 2 MHz- und der 4 MHz-Sonde aufgelöst, nicht jedoch von der 1 MHz-Sonde. Daraus folgt, dass die 2 MHz-Wellen ein Auflösungsvermögen von wenigstens 2,0 mm, die 1 MHz-Wellen ein Auflösungsvermögen von weniger als 2,0 mm haben.

Das Auflösungsvermögen einer Welle entspricht in etwa ihrer Wellenlänge. Diese ist bei der 2 MHz-Welle

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} \\ &= \frac{2735 \text{ m s}^{-1}}{2 \text{ MHz}} \\ &= 1,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

und bei der 1 MHz-Welle

$$\lambda = 2,8 \text{ mm}$$

Die praktische Abschätzung und die theoretische Betrachtung sind miteinander verträglich.

3. Aus der Laufzeit T_0 , die an einer Stelle ohne Bohrung gemessen wurde, und den beidseitigen Laufzeiten zur Bohrung lässt sich eine Fehlstrecke errechnen, die dem doppelten Bohrungsdurchmesser d entspricht. Wenn t_0 der systematische Fehler der Zeit ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} c \cdot (T_0 + t_0) &= c \cdot (T_1 + t_0) + c \cdot (T_2 + t_0) + 2d \\ d &= \frac{c}{2} \cdot (T_0 - T_1 - T_2 + t_0) \end{aligned}$$

Nach der Messung des Aluminiumblocks wurde die Sonde nicht mehr ausgetauscht, t_0 ist deshalb wie bei der Messung des Aluminiumblocks $(1,36 \pm 0,08) \mu\text{s}$. Damit ergeben sich für die Bohrungen folgende Durchmesser:

Bohrung	$\frac{d}{\text{mm}}$
1	6,09
2	5,00
3	3,76
4	3,08
5	3,08
6	2,68
7	2,81
8	÷
9	9,64

Der Durchmesser der Bohrung 8 konnte wegen Bohrung 9 nicht entlang der langen Fläche bestimmt werden. Auch eine Messung entlang der kurzen Fläche war aufgrund der dann zu hohen Schallabschwächung nicht möglich. Da die Bohrungen 4...8 jedoch denselben Durchmesser zu haben scheinen, wird von 2,9 mm ausgegangen.

5. Es gilt

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

mit $I \propto U^2$, sodass

$$U(x) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot x}$$

und mit $x = c \cdot t$

$$U(x) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot c \cdot t}$$

Fitten einer Kurve mit dem konstanten Parameter $c = 2735 \text{ m s}^{-1}$ liefert:

$$\mu = (16,1 \pm 1,6) \text{ m}^{-1}$$

Messunsicherheit

Fehlerquellen sind

- die Dicke des Ultraschallgels
- die Ablesegenauigkeit der Laufzeit
- nicht perfekte Parallelität gegenüber liegender Flächen der Probekörper
- Abweichungen der tatsächlichen Schallfrequenz von den Sollwerten
- Temperaturschwankungen, die zu Änderungen der Schallgeschwindigkeit führen
- in der Gelschicht eingeschlossene Luftblasen (Hieraus folgt eine Verfälschung des Schallschwächungskoeffizienten, da die Luftblasen zusätzliche Phasengrenzen darstellen, an denen Reflexion und damit Abschwächung stattfindet.)

Insgesamt ergibt sich durch die Unsicherheit der Laufzeit der größte Fehler. Für die einzelnen Teilaufgaben bedeutet dies:

1. Hier wurden relativ viele Messungen gemacht, sodass eine statistische Auswertung mithilfe der STUDENT-t-Verteilung möglich ist. Diese wird von *qtplot* automatisch durchgeführt. Die ausgegebenen Werte sind in der Auswertung bereits angegeben.

Für die Reflexion in Acryl bei 4 MHz wurde mangels Freiheitsgraden von *qtplot* ein unendlicher Fehler ausgegeben. Geht man von einem Größtfehler von $\pm 0,3 \mu\text{s}$ aus, so ergibt sich über

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta T}$$
$$u(c) = u(T) \cdot \frac{\Delta s}{\Delta T^2}$$

eine Unsicherheit von $\pm 28 \text{ m s}^{-1}$.

Für die 2 MHz-Wellen wurden zwei Messungen durchgeführt. Durch Gewichtung der Ergebnisse mit dem Quadrat der jeweiligen Unsicherheiten lassen sich die voneinander unabhängigen (!) Einzelergebnisse zu einem Gesamtergebnis mit kleinerer Gesamtunsicherheit zusammenfassen. Es ergibt sich $c = (2735 \pm 17) \text{ m s}^{-1}$.

Für die Unsicherheit der Elastizitätsmoduln ergibt sich aus

$$E = c^2 \cdot \rho$$

bei vernachlässigbarer Unsicherheit von ρ

$$u(E) = 2 \cdot u(c) \cdot c \cdot \rho$$

für Acryl 0,11 GPa und für Aluminium 0,41 GPa

- Die Fehlerrechnung entfällt hier, da keine Sonden mit einer Frequenz zwischen 1 MHz... 2 MHz zur Verfügung standen und es sich somit nur um eine grobe Abschätzung handelt.
- Die Laufzeiten sind mit einer relativ hohen Ungenauigkeit verbunden (jeweils $\pm 0,3 \mu\text{s}$). In die Berechnung jedes Bohrungsdurchmessers fließen jeweils drei Laufzeiten ein, sodass ein Fehler in der Gesamtzeit von etwa

$$\begin{aligned} u(T_0 - T_1 - T_2 + t_0) &= \sqrt{3 \cdot (0,3 \mu\text{s})^2 + (0,08 \mu\text{s})^2} \\ &= 0,5 \mu\text{s} \end{aligned}$$

resultiert. Dieser Fehler ist so groß, dass der Fehler der Schallgeschwindigkeit vernachlässigbar ist. Alle Ergebnisse sind deshalb mit einem Fehler von

$$\begin{aligned} u(d) &= \frac{c}{2} \cdot u(T_0 - T_1 - T_2 + t_0) \\ &= \frac{2735 \text{ m s}^{-1}}{2} \cdot \pm 0,5 \mu\text{s} \\ &= \pm 0,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

behaftet.

- (entfällt)
- (statistische Fehlerauswertung durch *qtiplot*)

Zusammenfassung

1.	Stoff	ν	c	E
	Acryl	1 MHz	$(2695 \pm 26) \text{ m s}^{-1}$	$(8,57 \pm 0,17) \text{ GPa}$
	Acryl	2 MHz	$(2735 \pm 17) \text{ m s}^{-1}$	$(8,83 \pm 0,11) \text{ GPa}$
	Acryl	4 MHz	$(2749 \pm 28) \text{ m s}^{-1}$	$(8,92 \pm 0,18) \text{ GPa}$
	Aluminium	2 MHz	$(6341 \pm 12) \text{ m s}^{-1}$	$(108,56 \pm 0,41) \text{ GPa}$

Es scheint eine Abhängigkeit zwischen Schallfrequenz und -geschwindigkeit zu geben. Darüber, ob diese Abhängigkeit tatsächlich vorliegt, kann jedoch mit der gegebenen Messgenauigkeit keine verlässliche Aussage getroffen werden.

Für die Schallgeschwindigkeit finden sich Literaturwerte von $6250 \text{ m s}^{-1} \dots 6350 \text{ m s}^{-1}$ für Schall in Aluminium¹ und 2730 m s^{-1} für Ultraschall in Acryl². Diese stehen mit dem Messergebnis in Einklang.

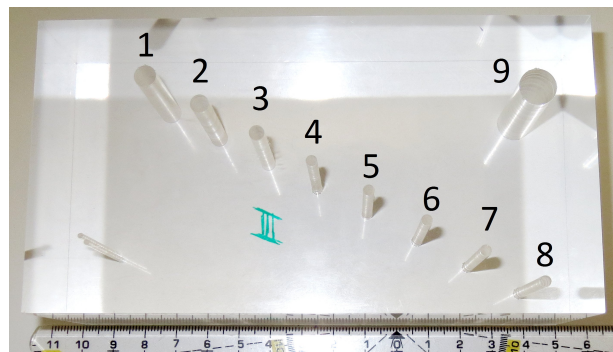
2. Die bekannte Formel, der zufolge sich das Auflösungsvermögen Δs nach

$$\Delta s = \lambda = \frac{c}{\nu}$$

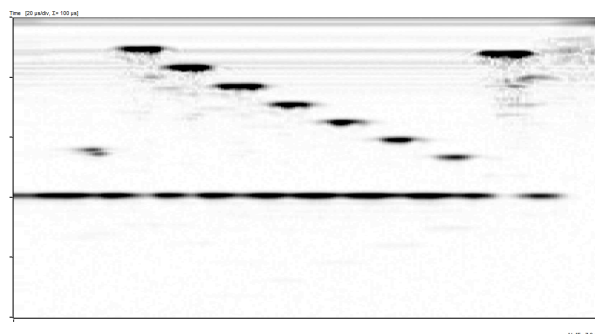
berechnet konnte bestätigt werden.

3. Die Durchmesser der Bohrungen sind:

Bohrung	d
1	$(6,1 \pm 0,7) \text{ mm}$
2	$(5,0 \pm 0,7) \text{ mm}$
3	$(3,8 \pm 0,7) \text{ mm}$
4	$(3,1 \pm 0,7) \text{ mm}$
5	$(3,1 \pm 0,7) \text{ mm}$
6	$(2,7 \pm 0,7) \text{ mm}$
7	$(2,8 \pm 0,7) \text{ mm}$
8	$(2,9 \pm 0,7) \text{ mm}$
9	$(9,6 \pm 0,7) \text{ mm}$



4. Graustufenbild entlang der im Foto oben liegenden Kante (von links nach rechts):



5. Der Schallschwächungskoeffizient für 2 MHz-Ultraschall beträgt

$$\mu = (16,1 \pm 1,6) \text{ m}^{-1}$$

¹[http://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit#Beispiele für Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien](http://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit#Beispiele_f%C3%BCr_Schallgeschwindigkeiten_in_verschiedenen_Medien)

²<http://www.olympus-ims.com/de/ndt-tutorials/thickness-gage/appendices-velocities/>