Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker"
Aufgaben zum 22.05.2013
Kondensatoren

Aufgabe 1

a) Für den Plattenkodensator gilt:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$
$$Q = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \cdot U$$

In einem Plattenkondensator herrscht ein homogenes elektrisches Feld $E = \frac{U}{d}$, sodass

$$Q = \varepsilon \cdot A \cdot E$$

Nimmt man an, dass zwischen den Platten Vakuum ist, so gilt

$$Q = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 600\,\mathrm{cm}^2 \cdot 300\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$$
$$Q = \underline{\underline{1{,}59 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}}$$

b) Wie in der Vorlesung und in vorhergehenden Übungen hergeleitet, gilt für die in einem Kondensator gespeicherte Energie W

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

Nun muss diese Gleichung nach dem Weg abgeleitet werden. Dabei ist jedoch U abhängig vom Abstand der Platten zueinander und muss daher erst substituiert werden. Da Q unabhängig vom Plattenabstand ist, bietet sich an, dazu die Beziehung $C = \frac{Q}{U}$ zu verwenden:

$$W = \frac{1}{2C} \cdot Q^2$$

Im Plattenkodensator bedeutet dies:

$$W = \frac{d}{2\varepsilon \cdot A} \cdot Q^2$$

Ableiten nach dem Weg in seiner Richtung liefert die wirkende Kraft:

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}d} = \frac{1}{2\varepsilon \cdot A} \cdot Q^2$$

Mit der oben hergeleiteten Formel für Q ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\varepsilon \cdot A} \cdot (\varepsilon \cdot A \cdot E)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot E^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 600\,\mathrm{cm}^2 \cdot \left(300\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}\right)^2 \\ &= \underline{\underline{23{,}9\,\mathrm{mN}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Hier wirken auf die Kugel die COULOMB- und die Gravitationskraft:

$$F_\downarrow = F_g + F_c$$

Die COULOMB-Kraft kann dabei mithilfe des Konzepts der Spiegelladung beschrieben werden.

$$F_\downarrow = m \cdot g + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q^2}{(2z)^2}$$

Die Masse lässt sich aus Dichte und Kugelvolumen leicht berechnen. Für den Abstand z der Punktladung zur Platte wird angenommen, dass sich die 2 cm auf den Abstand zwischen der Oberkante der Platte und der Unterkante der Kugel beziehen. Durch die Spiegelladung konzentriert sich die Ladung an der Unterkante der Kugel, sodass man vereinfachend von einer Punktladung am Boden der Kugel ausgehen kann:

$$\begin{aligned}
F_\downarrow &= \varrho \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot g + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q^2}{(2h)^2} \\
F_\downarrow &= 8920\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (0{,}5\,\mathrm{cm})^3 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}} \cdot \frac{(20\,\mathrm{mC})^2}{(2 \cdot 2\,\mathrm{cm})^2} \\
&= 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} + 2{,}2 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N} \\
&= \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}$$

Die COULOMB-Kraft ist somit extrem groß, die Gravitationskraft vernachlässigbar klein.

Aufgabe 3

a) Das Drehmoment auf einen Dipol in einem elektrischen Feld ist:

$$\vec{T} = \left(\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+\right) + \left(\frac{-\vec{l}}{2} \times \vec{F}_-\right)$$

Dabei ist die Kraft proportional zur Feldstärke und der Ladung:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \left(\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{E} \cdot (+q)\right) + \left(\frac{-\vec{l}}{2} \times \vec{E} \cdot (-q)\right) \\
&= q \cdot \vec{l} \times \vec{E}
\end{aligned}$$

$q \cdot \vec{l}$ ist das Dipolmoment, sodass

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Das maximale Drehmoment resultiert dann, wenn $\vec{p} \perp \vec{E}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T &= p \cdot E \\
&= 6{,}17 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C\,m} \cdot 3000\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}} \\
&= \underline{\underline{1{,}85 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{N\,m}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (fortgesetzt)

b) Die potentielle Energie eines elektrischen Dipols in einem äußeren elektrischen Feld ist

$$E_{pot} = -\vec{p} \circ \vec{E}$$

Maximal ist sie für $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_{pot} &= p \cdot E \\ &= 6{,}17 \cdot 10^{-30}\,\mathsf{C\,m} \cdot 3000\,\frac{\mathsf{kV}}{\mathsf{m}} \\ &= 1{,}85 \cdot 10^{-23}\,\mathsf{J} \end{aligned}$$

Die thermische Energie eines H_2O-Moleküls berechnet sich nach

$$\begin{aligned} E_{th} &= k_B \cdot T \\ &= 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{K}} \cdot 300\,\mathsf{K} \\ &= 4{,}14 \cdot 10^{-21}\,\mathsf{J} \end{aligned}$$

Die thermische Energie ist damit über 200mal größer als die maximale potentielle Energie, woraus sich folgern lässt, dass das elektrische Feld relativ wenig Einfluss auf die Anordnung des einzelnen H_2O-Moleküls hat.

c) Das maximale Drehmoment wirkt, wenn beide Pole gleich weit vom Na^+-Ion entfernt sind. Nimmt man Na^+-Ion als Punktladung an, so berechnet sich das elektrische Feld nach dem allgemein bekannten Term:

$$T = p \cdot E = p \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Dabei ist r der Abstand zwischen dem Na^+-Ion und den Polen des H_2O-Moleküls, der sich nach dem Satz des PYTHAGORAS ergibt:

$$\begin{aligned} T &= p \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{(r_{\mathsf{Na}^+} + r_{\mathsf{H_2O}})^2 + r_{\mathsf{H_2O}}^2} \\ &= 6{,}17 \cdot 10^{-30}\,\mathsf{C\,s} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{V\,m}}} \cdot \frac{1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathsf{C}}{(95\,\mathsf{pm} + 140\,\mathsf{pm})^2 + (140\,\mathsf{pm})^2} \\ &= 1{,}19 \cdot 10^{-19}\,\mathsf{N\,m} \end{aligned}$$

Die maximale Wechselwirkungsenergie berechnet sich aus der Ladung q des Dipols und dem Potential φ_- (φ_+) an der Position der negativen (positiven) Partialladung nach

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \Big(-q \cdot \varphi_- \Big) + \Big(q \cdot \varphi_+ \Big) \\ E_{pot} &= \frac{p}{l} \cdot \varphi_+ - \frac{p}{l} \cdot \varphi_- \end{aligned}$$

Das Potential im Feld der Punktladung ist $\varphi = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$. In der Lage geringster potentieller Energie gilt weiterhin $r_- = r_{\mathsf{Na}^+}$ und $r_+ = r_{\mathsf{Na}^+} + l$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{p}{l} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\mathsf{Na}^+} + l} - \frac{1}{r_{\mathsf{Na}^+}} \right) \\ &= \frac{6{,}17 \cdot 10^{-30}\,\mathsf{C\,s}}{2 \cdot 140\,\mathsf{pm}} \cdot \frac{1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathsf{C}}{4\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathsf{C}}{\mathsf{V\,m}}} \cdot \left(\frac{1}{95\,\mathsf{pm} + 2 \cdot 140\,\mathsf{pm}} - \frac{1}{95\,\mathsf{pm}} \right) \\ &= -2{,}49 \cdot 10^{-19}\,\mathsf{J} \end{aligned}$$

Das Drehmoment ist 28mal, die Wechselwirkungsenergie im Mittel 60mal so groß wie die mittlere thermische Energie eines H_2O-Moleküls. Konkurrieren alle Effekte miteinander, so wird der Einfluss des Na^+-Ions lokal überwiegen.