Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker“
Aufgaben zum 08.05.2013
COULOMB-Wechselwirkung und elektrische Felder

Aufgabe 1

Die Spannung ist

$$U_{12} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r}$$

Nun ist $\vec{E}$ noch zu berechnen. Da sich die zum Leiter parallelen x-Komponenten aufheben, sind nur die Komponenten in y-Richtung relevant:

$$\begin{aligned} E_y &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon \cdot r} \cdot \cos\varphi_{y,r} \, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon \cdot y} \end{aligned}$$

Damit ist die Spannung

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon \cdot y} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln y \Big|_{y_1}^{y_2} \\ &= \frac{10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}}{2 \cdot 3{,}141\,592 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}} \cdot \ln \frac{0{,}4\,\mathrm{m}}{0{,}2\,\mathrm{m}} \\ &= \underline{\underline{12\,\mathrm{V}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die zu verrichtende Arbeit ergibt sich aus dem Produkt der Ladung und der Potentialdifferenz (Spannung) zwischen beiden Punkten:

$$\begin{aligned} W &= q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= q \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \\ &= 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot \frac{1000 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{4\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}} \cdot \left(\frac{1}{0{,}1\,\mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}2\,\mathrm{m}}\right) \\ &= \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J}}} = 7{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Die Energie des elektrischen Feldes ist gleich der Arbeit, die verrichtet muss, um das elektrische Feld aufzubauen. Dabei gilt zu jedem Zeitpunkt während der Aufladung:

$$\mathrm{d}W = U \cdot \ \mathrm{d}Q$$

Dabei ist U die Differenz des Potentials der Ladung bei unendlicher Entfernung und des Potentials der Ladung auf der Kugeloberfläche, also:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R}\ \mathrm{d}Q \\
W &= \int_0^Q \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R}\ \mathrm{d}Q \\
&= \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot R} \\
&= \frac{(10^{-3}\,\mathrm{C})^2}{8\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} \\
&= \underline{\underline{45\,\mathrm{kJ}}}
\end{aligned}$$

b) Wieder gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= U \cdot \ \mathrm{d}Q \\
\mathrm{d}W &= \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)\ \mathrm{d}Q \\
W &= \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)
\end{aligned}$$

Die Energie soll halb so groß sein wie oben, also:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \\
R_0 &= 2R \\
&= \underline{\underline{0{,}2\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}$$