Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker“
Aufgaben zum 19.06.2013
Lorentz-Kraft und Ampèresches Gesetz

Aufgabe 1

Die Gewichtskraft, die auf den Draht wirkt, muss durch die Lorentz-Kraft kompensiert werden:

$$\begin{aligned} F_G &= F_L \\ &= B \cdot I_B \cdot l \end{aligned}$$

Dabei gilt für das Magnetfeld um den Leiter A:

$$\begin{aligned} H &= \frac{I_A}{2\pi \cdot r} \\ B &= \frac{\mu \cdot I_A}{2\pi \cdot r} \ , \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} F_G &= \mu \cdot \frac{I_A}{2\pi \cdot r} \cdot I_B \cdot l \\ r &= \frac{\mu \cdot I_A \cdot I_B}{2\pi \cdot \frac{F_G}{l}} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 100\,\mathrm{A} \cdot 20\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}073\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} \\ &= \underline{\underline{5{,}5\,\mathrm{mm}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Lorentz-Kraft die vom Leiter 1 auf den auf den Leiter 2 anderen wirkt, beträgt

$$F_{L,1\to 2} = B_1 \cdot I_2 \cdot l_2$$

Einsetzen von

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu \cdot H_1 \\ &= \frac{\mu \cdot I_1}{2\pi \cdot r} \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \frac{F_{L,1\to 2}}{l_2} &= \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{m}} \\ &= 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \ , \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 3

Es gilt des AMPÈREsche Gesetz

$$I = \oint \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{s} \ ,$$

was sich aufgrund der Zylindersymmetrie vereinfacht:

$$I = 2\pi \cdot r \cdot H$$
$$B = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

unabhängig von der Verteilung der Stromdichte über den zylindersymmetrischen Leiter.

a) Da die Ströme des inneren und des äußeren Leiters gleich groß sind, aber in entgegengesetzte Richtungen fließen, heben sich ihre Magnetfelder außerhalb des Kabels gegenseitig auf ($B = 0$ für $r > R_2$).

b) Der äußere Leiter verursacht innerhalb des Kabels kein Magnetfeld. Der innere Leiter verursacht folgendes Magnetfeld, das eine Rechtschraube um die Stromrichtung beschreibt:

$$B = \frac{\mu \cdot I_i}{2\pi \cdot r} \qquad \text{mit} \qquad R_1 \leq r < R_2$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \\ &= \frac{\mu \cdot I_i^2}{8\pi^2 \cdot r^2} \end{aligned}$$

Integration über das Volumen des Leiters liefert

$$\begin{aligned} E &= \int\limits_{R_i}^{R_a} \int\limits_{0}^{l} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mu \cdot I_i^2}{8\pi^2 \cdot r^2} \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}l \cdot \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mu \cdot I_i^2 \cdot l}{4\pi} \cdot \ln r \Big|_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{\mu \cdot I_i^2 \cdot l}{4\pi} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot (1\,\mathrm{A})^2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{4\pi} \cdot \ln \frac{2\,\mathrm{mm}}{1\,\mathrm{mm}} \\ &= 6{,}9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

d) Es gilt die folgende Abhängigkeit zwischen der in einem Magnetfeld gespeicherten Energie E und der Induktivität L der Spule:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \\ L &= \frac{2E}{I^2} \\ \frac{L}{l} &= \frac{2E}{l \cdot I^2} \end{aligned}$$

Da außerhalb des Kabels kein Magnetfeld herrscht, ist die in c) berechnete Energie die gesamte Energie des Kabels. Es können deshalb diese Energie und die verwendete Länge eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{L}{l} &= \frac{2 \cdot 6{,}9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{m} \cdot (1\,\mathrm{A})^2} \\ &= \underline{\underline{1{,}4 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Bewegung des stabförmigen Leiters führt zu einer LORENTZ-Kraft, die seiner Bewegungsgeschwindigkeit v entgegengesetzt ist:

$$F_L = -B \cdot I \cdot l$$

mit

$$I = \frac{U}{R}$$

und

$$U = U_{ind} = \frac{\mathrm{d}(B \cdot A)}{\mathrm{d}t} \ ,$$

wobei B konstant ist und A die in der Leiterschleife eingeschlossene Fläche

$$A = l \cdot x$$

ist, sodass

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathrm{d}(B \cdot l \cdot x)}{\mathrm{d}t} R \\ &= \frac{B \cdot l}{R} \cdot v(t) \\ F_L &= -\frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v(t) \end{aligned}$$

Daraus folgt nach dem 2. NEWTONschen Axiom $F = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v(t)$$

Trennung der Variablen und beidseitige Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_0^t -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot \mathrm{d}t \\ \ln v \Big|_{v_0}^{v(t)} &= -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t \\ \boxed{v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t}} \end{aligned}$$