Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker“
Aufgaben zum 05.06.2013
Leiterschleifen und Spulen

Aufgabe 1

a) Die durch die beiden Spulen induzierte Spannung $U_{\mathrm{ind},k}$ ist

$$U_{\mathrm{ind},k} = L_k \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Dabei ist aufgrund der Reihenschaltung die Stromstärke für beide Spulen gleich. Außerdem gilt

$$U_{\mathrm{ind,ges}} = U_{\mathrm{ind},1} + U_{\mathrm{ind},2}$$
$$U_{\mathrm{ind,ges}} = L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Nimmt man an, dass sich eine Reihenschaltung zweier Spulen ebenfalls als Spule beschreiben lässt, so ergibt sich für die linke Seite

$$L_{\mathrm{ges}} \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Division durch $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ liefert den geforderten Zusammenhang:

$$L_{\mathrm{ges}} = L_1 + L_2$$

b) Hier ergibt sich der durch beide Spulen fließende Gesamtstrom aus den Teilströmen:

$$I_{\mathrm{ges}} = I_1 + I_2$$

Differentiation nach der Zeit liefert:

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{ges}}}{\mathrm{d}t} = \frac{I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{I_2}{\mathrm{d}t}$$

Außerdem sind nach dem Maschensatz die Spannungen (und damit auch die induzierten Anteile) über beiden Spulen gleich, also

$$U_{\mathrm{ind}} = L_k \cdot \frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{\mathrm{ind}}}{L_k}$$

Einsetzen und anschließende Division durch die induzierte Spannung liefert:

$$\frac{U_{\mathrm{ind}}}{L_{\mathrm{ges}}} = \frac{U_{\mathrm{ind}}}{L_1} + \frac{U_{\mathrm{ind}}}{L_2}$$
$$\frac{1}{L_{\mathrm{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Aufgabe 2

Für die Aufgabe wird das Koordinatensystem so gelegt, dass P Ursprung liegt, die z-Achse in die Ebene hinein zeigt und die einzelnen Leitersegmente parallel zur x- oder y-Achse verlaufen. Es gilt das differentielle Biot-Savard-Gesetz:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{H} &= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}l \cdot r \cdot \sin\alpha}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}l \cdot \frac{L}{2}}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Das Gesamtfeld folgt nun durch Integration über alle Kanten, was aufgrund der Symmetrie äquivalent ist zu:

$$
\int \mathrm{d}\vec{H} = 8 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\frac{L}{2}}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}x \ ,
$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2$ und $y = \frac{L}{2}$ gilt, sodass

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= 8 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\frac{L}{2}}{\left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{I \cdot L}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \left(x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{I \cdot L}{\pi} \cdot \left. \frac{x}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right|_0^{\frac{L}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\pi} \cdot \frac{I}{L} \\
&= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}}
\end{aligned}
$$

Die magnetische Flussdichte im Vakuum ist dementsprechend

$$
\vec{B} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}1 \end{pmatrix} \mu\mathrm{T}}}
$$

Aufgabe 3

a) Es gilt

$$U_{ind} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_A \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{a}$$

In dieser Aufgabe bewegt sich der Stab senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen Magnetfeldes, sodass

$$\begin{aligned}
U_{ind} &= B \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \\
U_{ind} &= B \cdot \frac{\mathrm{d}(l \cdot z)}{\mathrm{d}t} \\
U_{ind} &= B \cdot l \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
U_{ind} &= B \cdot l \cdot v \\
U_{ind} &= B \cdot l \cdot (g \cdot t + v_0) \\
U_{ind} &= 1\,\mathsf{T} \cdot 0{,}1\,\mathsf{m} \cdot \left(9{,}81\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} \cdot 2\,\mathsf{s} + 0\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}\right) \\
&= \underline{\underline{2{,}0\,\mathsf{V}}}
\end{aligned}$$

b) Es gilt die bereits hergeleitete Gleichung

$$U_{ind} = B \cdot l \cdot v$$

mit der Einschränkung, dass die Geschwindigkeit ortabhängig ist, also:

$$\begin{aligned}
U_{ind} &= \int\limits_0^l B \cdot v(l) \cdot \mathrm{d}l \\
&= \int\limits_0^l B \cdot (u \cdot f) \cdot \mathrm{d}l \\
&= \int\limits_0^l B \cdot (2\pi \cdot l \cdot f) \cdot \mathrm{d}l \\
&= \int\limits_0^l B \cdot \omega \cdot l \cdot \mathrm{d}l \\
&= \frac{B \cdot \omega \cdot l^2}{2} \\
&= \frac{1\,\mathsf{T} \cdot 20\frac{\pi}{\mathsf{s}} \cdot (0{,}1\,\mathsf{m})^2}{2} \\
&= \underline{\underline{0{,}3\,\mathsf{V}}}
\end{aligned}$$