Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker“
Aufgaben zum 24.04.2013
COULOMB-Wechselwirkung und elektrische Felder

Aufgabe 1

Sei der Winkel zwischen den beiden Fäden um den Aufhängepunkt 2φ, so lässt sich das entstehende Kräftegleichgewicht aus Erdanziehung F_g und COULOMB-Abstoßung F_c wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} F_g \cdot \sin\varphi &= F_c \cdot \cos\varphi \\ mg \cdot \sin\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2} \cdot \cos\varphi \\ d^2 &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot mg \cdot \tan\varphi} \end{aligned}$$

Korrekterweise ist $\tan\varphi = \frac{d}{2\cdot\sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}}$, was jedoch zu einer analytisch schwer lösbaren bikubischen Gleichung führen würde. Für $d \ll l$ bietet sich deshalb die Kleinwinkelnäherung $\tan\varphi = \frac{d}{2l}$ an. Dies führt zu

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{Q^2 \cdot l}{2\pi\varepsilon_0 \cdot mg \cdot d} \\ d &= \sqrt[3]{\frac{Q^2 \cdot l}{2\pi\varepsilon_0 \cdot mg}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{(2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C})^2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}}{2 \cdot 3{,}141\,592 \cdot 8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 10\,\mathrm{g} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \underline{\underline{0{,}050\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es gilt die erste MAXWELLsche Gleichung

$$\begin{aligned} \varrho &= \nabla\vec{D} \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\vec{V}} &= \varepsilon \cdot \nabla\vec{E} \end{aligned}$$

Integration über ein Volumen liefert

$$Q = \iiint_V \varepsilon \cdot \nabla\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{V}$$

Daraus folgt nach dem GAUSSschen Satz

$$Q = \iint_a \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$$

Für eine Kugel im Vakuum bedeutet das

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_0 \cdot E \cdot \iint_a \mathrm{d}a \\ Q &= 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot E \end{aligned}$$

Dabei ist r der Radius der Kugel und Q die in ihr eingeschlossene Ladung.

a) Hier gilt

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{1\,\mathrm{C}}{4\pi \cdot 8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot (0{,}90\,\mathrm{m} + 0{,}10\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{8{,}99 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}}$$

b) Da die Kugel leitend ist, können sich die Ladungen frei darin bewegen. Aufgrund der Tatsache, dass die Ladungen einander abstoßen, werden sie sich im äußeren Teil der Kugel konzentrieren. Deshalb wird von der Kugel mit dem Radius $\frac{R}{2}$ keine Ladung eingeschlossen. Das Innere ist also feldfrei:

$$E = \underline{\underline{0}}$$

c) Hier ist die Situation die gleiche wie in a):

$$E = \underline{\underline{8{,}99 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}}$$

d) Es gilt

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \iiint\limits_V \varrho \mathrm{d}V$$

Aus der homogenen Ladungsverteilung folgt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \iiint\limits_V \frac{Q_{Kugel}}{V_{Kugel}} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot Q_{Kugel} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \end{aligned}$$

Da $r = \frac{R}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q_{Kugel}}{32\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \\ &= \frac{1\,\mathrm{C}}{32\pi \cdot 8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot (0{,}05\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{4{,}49 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Da Felder immer zur negativen Ladung zeigen, ist die Ladung der Erde negativ:

$$\begin{aligned} Q_{Erde} &= -|Q_{umschlossen}| \\ &= -4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot E \\ &= -4\pi \cdot 8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot (6{,}380 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2 \cdot 130\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \\ &= \underline{\underline{-5{,}9 \cdot 10^5\,\mathrm{C}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Beschleunigung, die die Kugel erfährt, berechnet sich nach:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ &= \frac{2}{m} \cdot F_c \cdot \cos\alpha \\ &= \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{x^2 + d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \\ &= k \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Das Extremum liegt an der Stelle, an der die Ableitung von a nach x verschwindet:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{k \cdot \mathrm{d}x} = 0 &= \frac{1}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(x^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} \\ 0 &= 1 - \frac{3x^2}{x^2 + d^2} \\ x &= \underline{\underline{\pm\frac{d}{\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

Die geforderte Bedingung trifft also auf zwei x zu. Dabei wird die Ladung bei $x = -\frac{d}{\sqrt{2}}$ in positive x-Richtung beschleunigt, bei $x = +\frac{d}{\sqrt{2}}$ in negative x-Richtung.