Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker“
Aufgaben zum 15.05.2013
Kondensatoren

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{r}} = \frac{Q}{\int\limits_{r_1}^{r_2} E\ \mathrm{d}r}$$

Dabei gilt, wie letzte Woche hergeleitet, $E = \frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l\cdot r}$, sodass

$$C = \frac{Q}{\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l\cdot r}\ \mathrm{d}r} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

b) Einsetzen in die in a) hergeleitete Formel ergibt

$$C = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 8{,}8542\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{\ln\frac{1{,}5\,\mathrm{mm}}{0{,}5\,\mathrm{mm}}} = \underline{\underline{1{,}0\cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}}}$$

c) Im Feld wird die bei der Aufladung verrichtete Arbeit gespeichert. Diese beträgt:

$$W = \int\limits_0^Q U\ \mathrm{d}Q$$

Dabei ist die Spannung, wie oben festgestellt, $\frac{q}{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}$, sodass

$$W = \int\limits_0^Q \frac{q}{2\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}\ \mathrm{d}q = \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Ersetzt man mithilfe der in a) hergeleiteten Formel für die Kapazität, ergibt sich der äquivalente Ausdruck

$$W = \frac{\pi\cdot\varepsilon\cdot l\cdot U^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

d) Um ein Durschlagen zu verhindern, muss die Ungleichung

$$E_{max} > E(R) \quad \forall \quad R \quad \text{mit} \quad R_1 \le R \le R_2$$

erfüllt sein. Dabei ist das elektrische Feld E in einem Zylinderkondensator $\frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l \cdot r}$ und damit an der Oberfläche des inneren Zylinders am stärksten, sodass der Zusammenhang vereinfacht werden kann zu

$$\begin{aligned} E_{max} &> \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l \cdot R_1} \\ &> \frac{C \cdot U}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l \cdot R_1} \end{aligned}$$

Einsetzen der in a) hergeleiteten Formel für die Kapazität liefert

$$\begin{aligned} E_{max} &> \frac{U}{R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \\ U &< E_{max} \cdot R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \\ &< 30\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}} \cdot 2\,\mathrm{mm} \cdot \ln \frac{6\,\mathrm{mm}}{2\,\mathrm{mm}} \\ &\underline{\underline{< 65{,}9\,\mathrm{kV}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Es gilt der Maschensatz

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 \\ U_0 &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \end{aligned}$$

Da die Kondensatoren seriell geschalten sind, gilt zu jedem Zeitpunkt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$

sodass zu jedem Zeitpunkt die Integrale der Ströme (Ladungen) gleich sein müssen, also

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ Q &= U_0 \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \\ &= 200\,\mathrm{V} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}}{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} + 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} \\ Q_1 = Q_2 = Q &= \underline{\underline{4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}} \end{aligned}$$

Der Spannungsabfall über einem einzelnen Kondensator ergibt sich nach

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{Q}{C_i} \\ U_1 &= \frac{4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = \underline{\underline{120\,\mathrm{V}}} \\ U_2 &= \frac{4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}{6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = \underline{\underline{80\,\mathrm{V}}} \end{aligned}$$

b) In der parallelen Schaltung ist der Spannungsabfall über einem Kondensator gleich der Quellenspannung

$$U_1 = U_2 = U_0 = \underline{\underline{200\,\mathrm{V}}}$$

Die Ladungen sind dann

$$\begin{aligned} Q_i &= C_i \cdot U_0 \\ Q_1 &= 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 200\,\mathrm{V} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}} \\ Q_2 &= 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 200\,\mathrm{V} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Ansatz aus der Vorlesung

Die Energiedichte ist

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \circ \vec{E} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot E^2 \end{aligned}$$

Das elektrische Feld einer Kugelladung ist dabei $\frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}$, sodass

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \right)^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{C \cdot U}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Die Kapazität eines Kugelkondensators ist $C = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1}$ und geht für eine Kugelladung mit $R_2 \to \infty$ in $C = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot R$ über, sodass

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{(4\pi \cdot \varepsilon \cdot R) \cdot U}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \right)^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{U^2}{R^2} \\ &= 2\varepsilon \cdot \frac{U^2}{d^2} \\ &= 2 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{(8000\,\mathrm{V})^2}{(10\,\mathrm{cm})^2} \\ &= \underline{\underline{0{,}11 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Ansatz, den ich verstehe

Die Energie ist die Flächenladungsdichte dividiert durch die Oberfläche der Kugel:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sigma}{A} \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R} \end{aligned}$$

Wie letzte Woche hergeleitet, ist $W = \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot R}$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot R}\right)}{\mathrm{d}R} \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\frac{C^2 \cdot U^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot R}\right)}{\mathrm{d}R} \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\frac{(4\pi \cdot \varepsilon \cdot R)^2 \cdot U^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot R}\right)}{\mathrm{d}R} \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot R^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(2\pi \cdot \varepsilon \cdot R \cdot U^2\right)}{\mathrm{d}R} \\ &= \frac{\varepsilon \cdot U^2}{2R^2} \\ &= 2\varepsilon \cdot \frac{U^2}{d^2} \\ &= 2 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot \frac{(8000\,\mathrm{V})^2}{(10\,\mathrm{cm})^2} \\ &= \underline{\underline{0{,}11 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}}} \end{aligned}$$