Toshiki Ishii (Matrikel 3266690, Seminargruppe 2)
„Experimentalphysik für Chemiker"
Aufgaben zum 05.06.2013
KIRCHHOFFsche Gesetze

Aufgabe 1

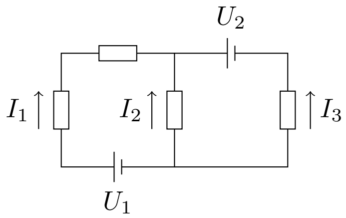
Das Problem lässt sich mit der Maschenregel leicht erklären: Die Glühlampe, die parallel zum Widerstand geschaltet ist, leuchtet heller, da an ihr volle Spannung der Spannungsquelle abfällt. Bei der in Reihe zum Widerstand geschalteten Glühlampe fällt dagegen nur ein Teil der Spannung ab. Aufgrund des OHMschen Gesetzes fließt durch sie auch ein größerer Strom, sodass sie mehr Leistung aufnimmt und heller leuchtet.

Aufgabe 2

Die Leistung berechnet sich nach

$$P_1 = U_1 \cdot I_1$$

U_1 ist bekannt, nun muss I_1 gefunden werden. Betrachten wir zunächst mögliche Vereinfachungen: Die linke Masche ist im Prinzip eine Parallelschaltung aus einem Widerstand $2R$ und zwei Widerständen R (Gesamtwiderstand $2R$). Da hier zwei gleich große Widerstände in Reihe geschaltet sind, ist der effektive Widerstand nur halb so groß. Man kann also ein vereinfachtes Schaltbild zeichnen, in dem statt dieser drei Widerstände nur einer vorkommt:



Es gelten der Knotensatz

$$0 = I_1 + I_2 + I_3$$

sowie die Maschensätze

$$U_1 = 2R \cdot I_1 - R \cdot I_2$$
$$U_2 = R \cdot I_3 - R \cdot I_2$$

Ersetzen von I_3 im zweiten Maschensatz mithilfe des Knotensatzes liefert

$$U_2 = -R \cdot I_1 - 2 \cdot R \cdot I_2$$

Durch Linearkombination mit dem ersten Maschensatz folgt

$$2U_1 - U_2 = 5R \cdot I_1$$
$$I_1 = \frac{2U_1 - U_2}{5R}$$

Einsetzen in die Gleichung für die Leistung ergibt:

$$P = U_1 \cdot \frac{2U_1 - U_2}{5R}$$
$$= 9\,\mathrm{V} \cdot \frac{2 \cdot 9\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V}}{5 \cdot 10\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}16\,\mathrm{W}}}$$

Aufgabe 3

Seien I_k die Ströme, die durch die Widerstände R_k fließen. Definiert man, dass alle Ströme, die zu dem Knoten zwischen den drei Widerständen fließen, positiv sind, die anderen negativ, so ergibt sich die Knotenregel

$$0 = I_1 + I_2 + I_3$$

sowie die Maschenregeln

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 \\ U_2 &= R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 \end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(U_1 - U_2) \cdot R_3 + U_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \\ I_2 &= \frac{(U_2 - U_1) \cdot R_3 + U_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \\ I_3 &= \frac{-U_1 \cdot R_2 - U_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 2\,\Omega \cdot 4\,\Omega \cdot 3\,\Omega \cdot \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega}\right) = 26\,\Omega^2 \ ,$$

sodass

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(6\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V}) \cdot 3\,\Omega + 6\,\mathrm{V} \cdot 4\,\Omega}{26\,\Omega^2} && = \underline{\underline{+1{,}4\,\mathrm{A}}} \\ I_2 &= \frac{(2\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V}) \cdot 3\,\Omega + 2\,\mathrm{V} \cdot 2\,\Omega}{26\,\Omega^2} && = \underline{\underline{-0{,}3\,\mathrm{A}}} \\ I_3 &= \frac{-6\,\mathrm{V} \cdot 4\,\Omega - 2\,\mathrm{V} \cdot 2\,\Omega}{26\,\Omega^2} && = \underline{\underline{-1{,}1\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Leistung P_a, die der Widerstand R_a aufnimmt, ist:

$$\begin{aligned} P_a &= R_a \cdot I^2 \\ P_a &= R_a \cdot \left(\frac{U_0}{R_a + R_i}\right)^2 \end{aligned}$$

Extremal ist diese für

$$\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}R_a} = U_0^2 \cdot \frac{R_i - R_a}{(R_a + R_i)^3} = 0$$

Dies ist nur für $R_a = R_i$ der Fall. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P_a &= R_i \cdot \left(\frac{U_0}{R_i + R_i}\right)^2 \\ P_a &= \frac{U_0^2}{4R_i} \end{aligned}$$

Dass ein Maximum vorliegt, folgt aus der Tatsache, dass $\frac{\mathrm{d}^2 P_a}{\mathrm{d}R_a^2}$ an dieser Stelle negativ ist.