

Organisation

Klausur

Voraussetzung für das Schreiben der Klausur ist der erfolgreiche Abschluss des Praktikums „Physikalische Chemie Ib“ bei Prof. Dr. Denecke im Sommersemester 2013.

Klausur ist am 10.07.2013 um 08:30 bis 10:00 im Großen Hörsaal Physik

Nachklausur am 17.09.2013 um 09:00 bis 10:30 im Theoretischen Hörsaal Physik

Übungsaufgaben

Die Übungsaufgaben gibt es wöchentlich ab dem 10.04.2013 bis zum 15.05.2013 (Satz A). Sie finden sich unter

<http://www.uni-leipzig.de/mqf/cgi-bin/index.cgi?id=3>

Werden im Satz A nicht die Hälfte der Punkte erreicht, so kann der Satz B vom 22.05.2013 bis zum 19.06.2013 genutzt werden, um die Punktzahl zu erfüllen.

Kontakt

Prof. Pöpl

0341-97-32608

poepl@uni-leipzig.de

1 Elektrostatik

1.1 Elektrische Ladung

Symbol: Q (auch q)

1.1.1 Arten von Ladungen

Es gibt positive und negative Ladungen.

1.1.2 Quantelung der Ladung

Die elektrische Ladung ist quantisiert nach

$$Q = N \cdot e \text{ mit } N \in \mathbb{Z}$$

Dies folgt daraus, dass alle Ladungen aus den Elementarteilchen (Elektronen e^- und Protonen p^+) zusammengesetzt sind.

- Elektron e^- hat $Q = -e = 1,602\,191\,0 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$
- Proton p^+ hat $Q = +e = 1,602\,191\,0 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$

1.1.3 Ladungserhaltung

In einem isolierten System bleibt die elektrische Ladung erhalten.

1.1.4 Kräfte zwischen Ladungen

Entgegengesetzte Ladungen ziehen einander an, gleichartige Ladung stoßen einander ab. Durch Einwirkung äußerer Kräfte können dennoch Ladungsungleichgewichte erzeugt werden.

Ein Beispiel für eine äußere Kraft ist die Reibung. Sie führt zur Reibungselektrizität. Nach der COHN-Regel sammelt sich bei Reibung zweier Materialien unterschiedlicher Dielektrizitätskonstanten ($\epsilon_{\text{Wolle}} > \epsilon_{\text{Plaste}}, \epsilon_{\text{Porzellan}} > \epsilon_{\text{Leder}}$) an dem Material mit der höheren Dielektrizitätskonstante die positiven Ladungen.

Abstandsabhängigkeit: Coulomb-Pendel

Eine geladene Kugel wird in die Nähe einer lose aufgehängten Kugeln der gleichen Ladung gebracht und die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Entfernung der beiden Kugeln r gemessen.



In dem Punkt, in dem das Kräftegleichgewicht erreicht ist, sind die Tangentialkomponenten der COULOMB-Kraft und der Gewichtskraft gleich:

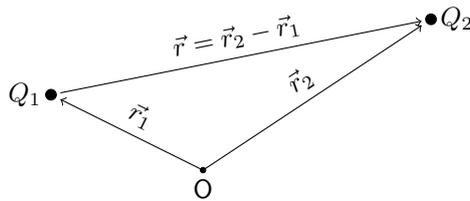
$$\begin{aligned}
 F_{c,t} &= F_{g,t} \\
 F_c \cdot \cos \varphi &= m \cdot g \cdot \sin \varphi \\
 F_c &= m \cdot g \cdot \tan \varphi \\
 F_c &= m \cdot g \cdot \frac{x}{l'} \\
 F_c &\approx m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \quad \text{für kleine } \varphi
 \end{aligned}$$

Für kleine Winkel ist also die COULOMB-Kraft ungefähr proportional zur Auslenkung x . Im Experiment wird beobachtet, dass sich die Auslenkung x vervierfacht, wenn man den Abstand r halbiert. Es folgt also die Proportionalität

$$F_c \sim \frac{1}{r^2}$$

1.1.5 Coulomb-Kraft, Coulomb-Gesetz

Das COULOMB-Gesetz beschreibt die Kraft zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 .



$$\begin{aligned}\vec{F}_{c,1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

Aufgrund der Ähnlichkeit mit dem Gravitationsgesetz ist auch hier das Linienintegral über eine geschlossene Kurve null, sodass die COULOMB-Kraft wie die Gravitationskraft eine konservative Kraft ist. Für Elektronen gilt das Verhältnis

$$\frac{F_c}{F_g} \approx 10^{40} (!)$$

1.2 Elektrisches Feld

1.2.1 Ausgangspunkt

COULOMB-Kräfte sind additiv. Seien beispielsweise Ladungen Q_1, Q_2, \dots, Q_n mit den Vektoren vom Koordinatenursprung $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ gegeben. Die Wirkung dieser Ladungen auf eine Probeladung q am Ort \vec{r} ergibt sich folglich aus:

$$F_c(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(\vec{r}_i - \vec{r})^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}$$

Hat man nun eine konstante Ladungsverteilung mit differentiellen Teilladungen $dQ(\vec{r}')$ mit einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$, so ist die COULOMB-Kraft von $\rho(\vec{r}')$ auf Q :

$$\begin{aligned}F_c(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_Q \frac{1}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dQ' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \int \int \frac{1}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \rho(\vec{r}') dV \\ &= q \cdot E\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q} \text{ mit } [E] = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

das elektrische Feld. Die Ladungsverteilung erzeugt eine Eigenschaft des Raumes, die darin besteht, dass eine Kraft auf eine Probeladung wirkt. Veranschaulicht wird das Feld durch Feldlinien. Diese entsprechen der Kraftwirkung, sind immer von der positiven zur negativen Ladung gerichtet. Ihre Dichte ist ein Maß für die Stärke der Kraft. Die Symmetrie der Feldlinien entspricht der Ladungsordnung.

1.2.2 Überlagerung von Feldlinien

Es gilt das Superpositionsprinzip.

Physikalisches Grundpraktikum

Einführung zum Physikpraktikum

Physikalisches Grundpraktikum, Prager Straße 34-36

Online-Zugang

<http://www.uni-leipzig.de/~prakphys/>

User: Chem

Passwort: Chem2013

Origin: <http://www.uni-leipzig.de/~zno>

Auch suchen nach qtiplot, scidavis

Prof. Dr. Andreas Pöpl

„Experimentalphysik“

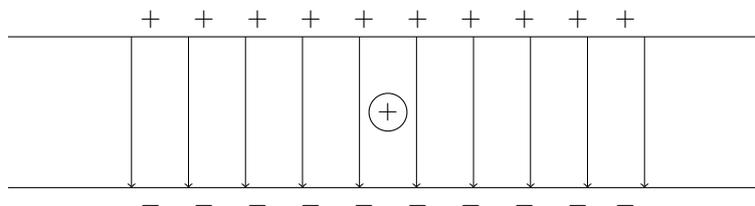
Vorlesung 17.04.2013

1.2.3 Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung

Sei \vec{r} der Vektor zu dem Punkt, an dem das elektrische Feld berechnet werden soll und \vec{r}' der Vektor zum Volumenelement dV , welches das elektrische Feld hervorruft.

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \rho(\vec{r}') dV$$

1.2.4 Millikan-Versuch



Es sind folgende Kräfte zu berücksichtigen

$$F_c = Q \cdot E = N \cdot e \cdot E$$

$$F_g = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{Tropfen}} \cdot g$$

$$F_r = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$$

$$F_a = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot g$$

Im Gleichgewicht gilt:

$$F_c + F_g = F_r + F_a$$

Bei Umpolung des Feldes gilt:

$$F_c + F_a = F_r + F_g$$

1.3 Die erste Maxwellsche Gleichung

Sei Φ der elektrische Fluss mit der Einheit $\frac{\text{Nm}^2}{\text{As}} = \text{Vm}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}d\Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{a} \cdot \cos \alpha \\ &= \vec{E} \circ d\vec{a} \\ \Phi &= \iint \vec{E} \circ d\vec{a}\end{aligned}$$

1.3.1 Beispiel: \vec{E} einer Punktladung Q , Kugelschale A um Q

$$\Phi = \iint_A \vec{E} \circ d\vec{a}$$

Dabei ist $d\vec{a}$ in Kugelkoordinaten $r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

$$\Phi = \iint \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$\varepsilon_0 \cdot \Phi = \iint \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \circ d\vec{a} = Q_{\text{umschlossen}} = \iiint_V \varrho \cdot dV$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

1.3.2 Zusammenfassung

$$\iint_A \vec{D} \circ d\vec{a} = Q_{\text{umschlossen}}$$

Mit dem GAUSSSchen Integralsatz folgt:

$$\nabla \vec{D} = \text{div} \vec{D} = \varrho$$

1.3.3 Beispiel: \vec{E} einer geladenen Hohlkugel $+Q$ mit Radius R

1. Fall: $r > R$

$$\begin{aligned}Q_{\text{umschlossen}} &= \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{a} \\ &= \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot \iint_A d\vec{a} \\ &= \varepsilon_0 \cdot E \cdot \iint_A da \\ &= \varepsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi r^2 \\ E &= \frac{Q_{\text{umschlossen}}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2} \\ \vec{E} &= \frac{Q_{\text{umschlossen}}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

2. Fall: $r < R$

$$\iint_A \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \, d\vec{a} = Q_{\text{umschlossen}} = 0$$

Dies bedeutet, dass im inneren der Hohlkugel kein Feld herrscht.

1.4 Das elektrische Potential

Die COULOMB-Kraft ist eine konservative Kraft, also:

$$\oint \vec{F}_c \circ d\vec{r} = 0$$
$$q \cdot \oint \vec{E}_c \circ d\vec{r} = 0$$

Dies kann bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass $\text{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$.

1.4.1 Potentielle Energie im elektrischen Feld

Die potentielle Energie einer Probeladung q bei \vec{r} im elektrischen Feld \vec{E} der Ladung Q bezüglich eines Referenzpunktes \vec{r}_0 berechnet sich nach:

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}, \vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \circ d\vec{r}'$$
$$= -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \circ d\vec{r}'$$

1.4.2 Das elektrische Potential

$$V(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{E_{\text{pot}}(\vec{r}, \vec{r}_0)}{q}$$
$$= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \circ d\vec{r}'$$

1.4.3 Beispiel: Elektrisches Potential einer Punktladung

$$V(\vec{r}, \vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \circ d\vec{r}'$$
$$= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (r')^2} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'} \circ d\vec{r}'$$
$$= \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Der sinnvollste Referenzpunkt ist $r_0 = \infty$, sodass

$$V = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$
$$E_{pot} = \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

1.4.4 Berechnung des elektrischen Feldes aus dem Potential

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$$
$$= -\frac{dV(\vec{r})}{d\vec{r}}$$

Beispiel: Äquipotentialfläche

Für eine Äquipotentialfläche gilt die Konstanz von $V(\vec{r})$, sodass

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{dV(\vec{r})}{d\vec{r}} = 0$$
$$\vec{E}(\vec{r}) \circ d\vec{r} = -dV(\vec{r}) = 0$$

Daraus folgt, dass auf einer Äquipotentialfläche alle Feldlinien senkrecht zur Fläche stehen.

1.4.5 Die elektrische Spannung

Die elektrische Spannung U_{21} zwischen den Orten \vec{r}_2 und \vec{r}_1 ist die Potentialdifferenz zwischen diesen Orten:

$$U_{21} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)$$
$$= \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$= \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Beispiel: Beschleunigung eines Elektrons im elektrischen Feld \vec{E}

Hier verrichtet die COULOMB-Kraft Arbeit am Elektron, dessen kinetische Energie in der Folge steigt.

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \circ d\vec{r}$$
$$= -e \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \circ d\vec{r}$$
$$= -e \cdot U_{21} = \frac{m_e}{2} \cdot v^2$$

Priv.-Doz. Dr. Michael Ziese
„Physikalisches Grundpraktikum“
Vorlesung 22.04.2013

Fehlerrechnung

In der Vorbereitung auf das Experiment sollte zu Hause $\frac{df}{dx_i}$ ausgerechnet werden. In der Auswertung sollte am Ende auch eine Tabelle mit allen Messergebnissen und Fehlerabschätzung folgen.

1.5 Elektrische Leiter im elektrischen Feld

1.5.1 Wirkung elektrischer Felder auf elektrische Leiter

Ein elektrischer Leiter ist dadurch charakterisiert, dass er frei bewegliche Ladungsträger enthält. Im Falle eines Metalls sind dies die Elektronen, die sich im Leitungsband befinden. In wässrigen Lösungen sind es die Anionen und die Kationen.

Im elektrischen Feld wirkt auf die Ladungsträger die COULOMB-Kraft $\vec{F}_c = q \cdot \vec{E}$, was eine Ladungsverschiebung (Influenz) innerhalb des Leiter bewirkt.

Experiment Ein feiner Wasserstrahl nach unten gerichteter Wasserstrahl wird von einem seitlich dazu platzierten positiven/negativen Stab zu dem Stab hin gelenkt.

Experiment Zwei leitend verbundene Metallplatten werden senkrecht zu den Feldlinien in einem elektrisches Feld platziert und im elektrischen Feld voneinander getrennt. Danach lässt sich feststellen, dass bei Platten entgegengesetzte Ladungen aufweisen. Erfolgt die Trennung parallel zu den Feldlinien, so ist dieses Phänomen nicht zu beobachten.

1.5.2 Lokalisierung der Ladungen in einem Leiter

Elektrische Ladungen, die auf einen Leiter aufgebracht oder durch ein elektrisches Feld verschoben werden, sitzen nur an der Oberfläche eines Leiters. Aus der ersten MAXWELLSchen Gleichung folgt für das Innere eines elektrostatisch geladenen Leiters

$$Q = \iint_A \vec{D} \, d\vec{a}$$
$$E = 0$$

Experiment Ein Metallbecher wird außen bis zum Gleichgewichtszustand mit einer Spannungsquelle aufgeladen und die Ladung gemessen. Lädt man ihn nun innen auf, so steigt die Ladung über den ersten Gleichgewichtswert hinaus.

1.5.3 Elektrisches Feld an der Oberfläche eines Leiters

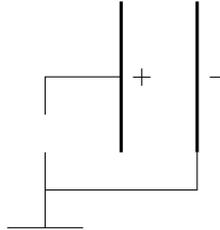
Die elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf der Oberfläche des Leiters. Wäre dies einmal nicht der Fall, so würde das resultierende elektrische Feld sofort zu einem Ausgleich führen, sodass die Komponente, die parallel zur Oberfläche steht, wieder verschwindet. Im stationären Fall ist die Oberfläche eines Leiters ist eine Äquipotentialfläche.

Experiment Die Flächenladungsdichte ($\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot E$) verschiedener leitender Oberflächen wird gemessen. Für eine Metallkugel mit dem Radius R gilt:

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R}$$
$$E_{\perp}(R) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot R^2} = \frac{V(R)}{R}$$

Da das Potential auf der gesamten Oberfläche gleich ist, ist die Feldstärke nur vom Krümmungsradius abhängig. Je gekrümmter eine Oberfläche also ist, umso größer ist die elektrische Feldstärke an der Oberfläche. Dies wird im Experiment beobachtet.

1.6 Kondensator



$$U = \int \vec{E} \circ d\vec{r}$$

$$Q = \varepsilon \cdot \iint_A \vec{E} \circ d\vec{a}$$

Daraus folgt, dass die Ladung, die ein Kondensator speichern kann, proportional zur Spannung ist:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die Einheit der Kapazität C ist das Farad F.

1.6.1 Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators

Ist die Plattenfläche sehr groß, so kann man annehmen, dass das elektrische Feld innerhalb des Kondensators homogen ist. Außerdem kann die Zylindersymmetrie gewählt werden, was zu einem einfachen Flächenintegral führt, da außer der Deckfläche (beziehungsweise Grundfläche) alle anderen Flächen zu den Feldlinien senkrechte Normalenvektoren aufweisen und somit wegfallen.

$$Q = \varepsilon \cdot \iint_A \vec{E} \circ d\vec{a}$$

$$= \varepsilon \cdot A \cdot E$$

Für die Berechnung der Spannung

$$U_{12} = - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_l^0 E \cdot dr$$

$$= E \cdot l$$

Daraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot A \cdot E}{E \cdot l}$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot A}{l}$$

mit der Oberfläche der Kondensatorplatten A , der Dielektrizitätskonstante ε und dem Plattenabstand l .

1.6.2 Parallelschaltung von Kondensatoren

Eine Parallelschaltung von Kondensatoren kann als ein elektrisches Bauelement betrachtet werden, da alle positiv (negativ) geladenen Platten leitend verbunden sind und somit zusammen mit dem sie verbindenden Leiter eine Äquipotentialfläche bilden müssen. Die Spannungsabfälle müssen folglich über alle Kondensatoren gleich sein. Die Gesamtladung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}Q_{gesamt} &= \sum_i C_i \cdot U_i \\ &= U \cdot C_{gesamt} \\ C_{gesamt} &= \sum_i C_i\end{aligned}$$

1.6.3 Serienschaltung von Kondensatoren

In einer Serienschaltung von Kondensatoren wird sich auf der mit dem Plus-Pol der Spannungsquelle verbundenen Kondensatorplatte eine positive Ladung sammeln, auf der mit dem Minus-Pol verbundenen Platte eine negative Ladung. Durch Influenz werden auch die dazwischen liegenden Platten geladen, wobei natürlich die Ladung erhalten bleibt, sodass Q für alle Kondensatoren gleich ist.

$$\begin{aligned}U_i &= \frac{Q}{C_i} \\ U_{gesamt} &= \sum_i U_i \\ &= Q \cdot \sum_i \frac{1}{C_i} \\ \frac{1}{C_{gesamt}} &= \sum_i \frac{1}{C_i}\end{aligned}$$

Prof. Dr. Andreas Pöpl

„Experimentalphysik“

Vorlesung am 01.05.2013 feiertagsbedingt ausgefallen

„Experimentalphysik“

Seminar am 07.05.2013

1.7 Der elektrische Dipol

Ein elektrischer Dipol ist ein aus einer positiven und einer negativen Ladungen zusammengesetztes Gebilde. Dabei gibt es das Dipolmoment

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

mit dem Abstand zwischen den Ladungen l .

1.7.1 Induziertes und permanentes Dipolmoment, Polarisation

Induziertes Dipolmoment

Ein induziertes Dipolmoment entsteht, wenn ein elektrisches Feld auf ein unpolares Molekül (im allgemeinen Moleküle mit Inversionssymmetrie: H_2 , N_2 , C_6H_6) wirkt. Das elektrische Feld führt dabei zu einer Ladungstrennung (Verschiebung der Elektronendichte) innerhalb des Moleküls – das Molekül wird polarisiert. Das induzierte Dipolmoment

entspricht dem Produkt aus Polarisierbarkeit und angelegtem elektrischen Feld:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$$

Dabei ist α allgemein unabhängig von der Temperatur und anisotrop (Polarisierbarkeitstensor α)

Permanentes Dipolmoment

Polare Moleküle besitzen ein intrinsisches Dipolmoment, sind also auch bei $\vec{E} = 0$ Dipole. Beispiele sind H_2O , NH_3 ...

Zwar können auch in Molekülen mit permanentem Dipolmoment zusätzliche Dipole induziert werden, das permanente Dipolmoment ist jedoch im Allgemeinen sehr viel größer als das induzierte.

Polarisation

Die Vektorsumme aller Dipolmomente in einem Volumen V heißt Polarisation \vec{P} :

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \cdot \sum_i \vec{p}_i$$

Es wird unterschieden zwischen Verschiebungspolarisation

$$P_{ver} = \frac{1}{V} \cdot \sum_i \vec{p}_{ind,i} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E} ,$$

die aus induzierten Dipolen resultiert, und Orientierungspolarisation

$$P_{or} = \frac{1}{V} \cdot \sum_i \vec{p}_{perm,i} ,$$

die aus der Orientierung permanenter Dipole resultiert.

1.7.2 Elektrisches Feld des elektrischen Dipols

Im elektrischen Feld eines Dipols verhält sich eine Probeladung, die zum positiven Pol eines elektrischen Dipols der Ladung Q und der Länge l den Abstand $\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}$ und zum negativen Pol den Abstand $\vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}$ so, wie es durch das Superpositionsprinzip beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= V_+(\vec{r}) - V_-(\vec{r}) \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r_+} - \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r_-} \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}|} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - \vec{r} \circ \vec{l} + \frac{l^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \vec{r} \circ \vec{l} + \frac{l^2}{4}}} \right) \end{aligned}$$

Für $r \gg l$ gilt nach TAYLOR-Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r} \cdot \left(1 + \frac{\vec{r} \circ \vec{l}}{2r^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\vec{r} \circ \vec{l}}{2r^2} \right) \\ &= \frac{Q \cdot \vec{r} \circ \vec{l}}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^3} \end{aligned}$$

Das Potential eines elektrischen Dipols ist also näherungsweise

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3}$$

und fällt für größere Abstände einer Probeladung zum Dipol sehr viel schneller ab als in einem elektrischen Feld eines elektrischen Monopols.

Über das elektrische Feld selbst

Das elektrische Feld selbst ist

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad}\varphi(\vec{r}) \\ &= -\nabla\varphi(\vec{r}) \\ &= -\nabla\left(\frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3}\right) \\ &= -\nabla\left(\frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \nabla\left(\frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{r^3}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \nabla \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial r^{-3}}{\partial i} \cdot \vec{e}_i + \frac{1}{r^3} \cdot \nabla \vec{p} \circ \vec{r}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot \nabla \vec{p} \circ \vec{r}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3 \cdot \vec{r}}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot \nabla \vec{p} \circ \vec{r}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3 \cdot \vec{r}}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{r} \cdot \nabla \vec{p} + \vec{p} \cdot \nabla \vec{r})\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3 \cdot \vec{r}}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot (0 + \vec{p} \cdot 1)\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3 \cdot \vec{r}}{r^5} + \frac{1}{r^3} \cdot \vec{p}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{-3 \cdot \vec{r}}{r^2} + \vec{p}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3} \cdot \left(\vec{p} \circ \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right) \end{aligned}$$

Symmetrie des Feldes

In Kugelkoordinaten ist das Potential des Feldes

$$\varphi = \frac{p \cdot \cos \vartheta}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E &= -\nabla\varphi \\ &= -\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi\right) \end{aligned}$$

Die Komponenten in Kugelkoordinaten sind folglich

$$\begin{aligned} E_\varphi &= 0 \\ E_\vartheta &= \frac{p \cdot \sin \vartheta}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3} \\ E_r &= \frac{2p \cdot \cos \vartheta}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^3} \end{aligned}$$

Energie des elektrischen Feldes

Die Aufladung eines Kondensators erfordert eine Arbeit W . Diese wird im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert. Den Aufladeprozess kann man in unendliche viele differentielle Transporte positiver Ladungen von der positiven auf die negative Platte aufteilen. Für die differentielle Arbeit ergibt sich dabei

$$\begin{aligned}dW &= U \cdot dq \\ &= \frac{q}{C} \cdot dq\end{aligned}$$

Integration über den gesamten Ladungstransport liefert

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dq \\ &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2\end{aligned}$$

Für einen Plattenkondensators ist dies

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dq \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{l} \cdot (E \cdot l)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot E^2 \cdot l \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \circ \vec{D} \cdot V\end{aligned}$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist damit

$$w = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \circ \vec{D}$$

Kraftwirkung auf Kondensatorplatten

Wie gerade hergeleitet, gilt

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot E \cdot z \\ W &= \frac{\varepsilon \cdot A \cdot E \cdot U^2}{2z}\end{aligned}$$

Die COULOMB-Kraft ist folglich

$$\begin{aligned}\vec{F}_c(z) &= -\text{grad}E_{pot} \\ \vec{F}_c(z) &= \text{grad}W \\ \vec{F}_c(z) &= \text{grad} \frac{\varepsilon \cdot A \cdot E \cdot U^2}{2z} \\ \vec{F}_c(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A \cdot U^2}{z^2} \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Der elektrische Dipol im elektrischen Feld

In einem homogenen elektrischen Feld wirken auf die Pole des elektrischen Dipol COULOMB-Kräfte von den entgegengesetzten Polen des Feldes. Dies führt zu einem Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{T}_+ &= \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+ \\ \vec{T}_- &= -\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_-\end{aligned}$$

Dies führt in Summe zum Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{T} &= q \cdot \vec{l} \times \vec{E} \\ \vec{T} &= \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned}$$

Potentielle Energie

Die potentielle Energie eines Dipols ist gegeben durch

$$\begin{aligned}E_{pot}(\vec{r}) &= \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \circ d\vec{r} \\ &= q \cdot \varphi(\vec{r}) \\ &= q \cdot \varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q \cdot \varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

TAYLOR-Reihenentwicklung liefert für

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r} + \vec{l}) &\approx \varphi(\vec{r}) + \vec{l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \\ &\approx \varphi(\vec{r}) + \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}E_{pot}(\vec{r}) &= q \cdot (\varphi(\vec{r}) + \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi(\vec{r})) - q \cdot \varphi(\vec{r}) \\ &= -q \cdot \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi(\vec{r}) \\ &= -\vec{p} \circ \vec{E}\end{aligned}$$

Orientierungspolarisation

Orientierungspolarisation steht immer thermisches Rauschen entgegen. Das bedeutet für die Polarisation

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{1}{V} \cdot \sum_i \langle \vec{p}_{perm} \rangle \cdot n \cdot \langle p_{perm} \cdot \cos \alpha \rangle \cdot \frac{\vec{E}}{E} \\ &= n \cdot p_{perm} \cdot \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{\vec{E}}{E} \\ &= n \cdot \frac{p_{perm}^2}{3k_B \cdot T}\end{aligned}$$

1.8 Dielektrika im elektrischen Feld

Wird ein Dielektrikum im elektrischen Feld eines Kondensators plaziert, so erhöht sich die Kapazität des Kondensators nach

$$C_{\text{Dielektrikum}} = \varepsilon_r \cdot C_{\text{Vakuum}}$$

Ursache ist die Ausrichtung der Dipolmomente im elektrischen Feld, was das elektrische Feld abschwächt. Es gilt

$$\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}}$$

Für die dielektrische Verschiebung gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}} \\ &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}}\end{aligned}$$

An der Oberfläche des Dielektrikums im Plattenkondensator ergeben sich Polarisationsladungen

$$Q_{\text{pol}} = n \cdot q \cdot l \cdot A$$

Die Flächenladungsdichte dieser Ladungen ist

$$\begin{aligned}\frac{Q_{\text{pol}}}{A} &= n \cdot q \cdot l \\ \frac{Q_{\text{pol}}}{A} &= n \cdot p \\ P &= \frac{Q_{\text{pol}}}{A} \\ \epsilon_0 \cdot E_{\text{Dielektrikum}} &= \frac{Q_{\text{frei}} - Q_{\text{pol}}}{A} \\ E_{\text{Dielektrikum}} &= E_{\text{Vakuum}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \\ P &= \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{E}_{\text{Dielektrikum}} \\ P &= \epsilon_0 \cdot \chi_{el} \cdot \vec{E}_{\text{Dielektrikum}}\end{aligned}$$

Dabei ist $\chi_{el} = \epsilon_r - 1$ die dielektrische Suszeptibilität. Aus diesem Zusammenhang lassen sich Aussagen über die Größen des permanenten und induzierten praktisch ermitteln.

Prof. Dr. Andreas Pöpl
„Experimentalphysik“
Vorlesung 15.05.2013

Experiment Ein Plattenkondensator mit zwei Platten im Abstand von 2 mm kann bei gegebener Spannung eine Ladung von 30 nC tragen. Bei Einfügen von Plexiglas als Dielektrikum steigt bei gleicher Spannung die Ladung auf 96 nC. Abschließend wird Plexiglas nur in eine Hälfte des Kondensators eingeführt und eine Ladung von 65 nC festgestellt. In den Kondensator wird nun ein Leiter eingeführt und eine Ladung von 24 nC festgestellt. Demzufolge muss ϵ_r für den metallischen Leiter sehr groß sein. Dies ist der Fall, weil ein elektrischer Leiter das äußere Feld abschirmt (FARADAY-Käfig).

Experiment In einen mit Luft gefüllten an eine Spannungsquelle angeschlossenen Plattenkondensator wird Plexiglas eingeführt. Beim Einführen entsteht Funkenschlag. Grund ist der hohe Unterschied der Feldstärken innerhalb des Dielektrikums und der Luft.

2 Elektrischer Strom

2.1 Stationäre Ströme – Gleichströme

Elektrischer Strom ist Ladungstransport. Bei Anlegen eines elektrischen Feldes an einen elektrischen Leiter kommt es zum Ladungstransport, ein Strom fließt. Die Stromstärke ist dabei die Ladungsmenge dQ , die pro Zeit dt durch den

Querschnitt A des stromführenden Leiters fließt.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Die Einheit der Stromstärke ist das Ampere A . Dabei wird vereinbart, dass I entlang des Feldvektors \vec{E} fließt, also positive Ladungsträger fließen.

Die Stromdichte \vec{j} ist der Strom I , der pro Querschnittsfläche A senkrecht durch den Leiterquerschnitt fließt.

$$\vec{j} = \frac{dI}{da} \cdot \vec{e}_a$$

Daraus ergibt sich die Stromstärke nach

$$I = \iint \vec{j} \circ d\vec{a}$$

Die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_d ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger unter Wirkung des elektrischen Feldes \vec{E} . Die Ladung, die in einer Zeit dt durch den Querschnitt fließt, ist gleich der Ladung, die sich im Abstand $v_d \cdot dt$ von der Fläche befinden.

$$\begin{aligned} dQ &= q \cdot n \cdot dV \\ &= q \cdot n \cdot A \cdot v_d \cdot dt \\ I &= q \cdot n \cdot A \cdot v_d \\ j &= q \cdot n \cdot v_d \\ \vec{j} &= q \cdot n \cdot \vec{v}_d \end{aligned}$$

Dabei ist die Driftgeschwindigkeit wesentlich kleiner als die thermische Geschwindigkeit der Elektronen. Die Elektronen können also wie ein ideales Gas betrachtet werden.

In Halbleitern und Gasen sind es beide Arten von Ladungsträger, sodass die Gesamtladung berechnet nach

$$\begin{aligned} Q_{ges} &= n^+ \cdot q^+ + n^- \cdot q^- \\ \vec{j} &= n^+ \cdot q^+ \cdot \vec{v}_d^+ + n^- \cdot q^- \cdot \vec{v}_d^- , \end{aligned}$$

wobei $v_d^+ \uparrow \downarrow v_d^-$

Die Kontinuitätsgleichung der Elektrizitätslehre wird formuliert als

$$\begin{aligned} -\frac{dQ}{dt} &= I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} \\ -\frac{\partial}{\partial V} \iiint_V \rho \cdot dV &= I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} \\ -\frac{\partial}{\partial V} \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} \cdot dV &= I \\ -\frac{\partial}{\partial V} \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} \cdot dV &= I = -\frac{d}{dt} \iiint_V Q \cdot dV \\ \nabla \cdot \vec{j} + \frac{dQ}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Für stationäre Ströme gilt

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

2.2 Ohmsches Gesetz

Für den Zusammenhang zwischen angelegter Spannung und fließendem Strom gilt das OHMSche Gesetz

$$R = \frac{U}{I}$$

mit dem elektrischen Widerstand R der Einheit Ω ($\frac{V}{A}$). Im allgemeinen ist R keine Konstante, sondern eine Funktion der Spannung.

Experiment Ein Strom wird bei konstanter Spannung erst durch ein Kabel, dann durch zwei gleichartige Kabel (parallel und seriell) geleitet. Es stellt sich heraus, dass gilt

$$R = \rho_s \cdot \frac{l}{A}$$

mit dem spezifischen Widerstand ρ_s der Einheit $\Omega \text{ m}$.

Die Leitfähigkeit ist definiert über

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} \\ R &= \frac{\int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a}} \\ R &= \frac{E \cdot l}{A \cdot j} \\ j &= \frac{E \cdot l}{R \cdot A} \\ \vec{j} &= \sigma \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \vec{j} &= n \cdot q \cdot \vec{v}_d \\ \sigma \cdot \vec{E} &= n \cdot q \cdot \vec{v}_d \\ \vec{v}_d &= \frac{\sigma \cdot \vec{E}}{n \cdot q} \end{aligned}$$

woraus sich ableiten lässt, wovon die Driftgeschwindigkeit abhängig ist (siehe auch HALL-Effekt).

Zur Verschiebung einer Ladung (Erzeugung eines Stroms) muss eine Arbeit verrichtet werden:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \Delta Q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \Delta W &= \Delta Q \cdot U \\ \Delta W &= R \cdot I^2 \\ \Delta W &= \frac{U^2}{R} \end{aligned}$$

Die geleistete Arbeit wird letztlich in Wärme umgewandelt.

2.3 Gleichstromkreise

2.3.1 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenregel

Die Kontinuitätsgleichung für stationäre Ströme besagt

$$\begin{aligned}\nabla \vec{j} &= 0 \\ \iiint_V \nabla \vec{j} \cdot dV &= \iint_A \vec{j} \cdot \vec{a} = 0 \\ \sum_k \iint_{A_k} \vec{j}_k \cdot d\vec{a}_k &= \sum_k I_k = 0\end{aligned}$$

Die unterstrichene Gleichung wird als Knotenregel bezeichnet.

Maschenregel

An einer Spannungsquelle mit der Ursprungung $U_0 > 0$ hängen mehrere seriell geschaltete Verbraucher. Dabei zeigt die Ursprungung immer vom höheren zum niedrigeren Potential. Die Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen zeigen auch immer vom höheren zum niedrigeren Potential.

Der Spannungsabfall über einem einzelnen Verbraucher kann über

$$U_k = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

berechnet werden. Integriert man über alle Verbraucher, so ergibt sich

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Dass dies gelten muss, folgt aus der Überlegung, dass mit diesem Ringintegral über die Potentialdifferenzen integriert wird. Das Ergebnis muss dabei die Spannung sein, die zwischen einem Ausgangspunkt und diesem Ausgangspunkt herrscht. Sie muss also verschwinden.

$$\sum_{k=0}^n U_k = 0$$

Für eine Masche mit nur einer Spannungsquelle U_0 gilt aufgrund der Vorzeichenkonvention

$$\sum_{k=1}^n U_k - |U_0| = 0$$

2.3.2 Anwendungen der Kirchhoffschen Gesetze

Spannungsteiler

Soll ein Verbraucher an eine Spannungsquelle angeschlossen werden, die eine höhere Spannung liefert als der Verbraucher benötigt, so wird an die Spannungsquelle ein Widerstand angeschlossen. Der Verbraucher wird dann an den Stromkreis derart angeschlossen, dass er mit einem geeigneten Punkt des Widerstandes und dem Kabel zur der

Spannungsquelle verbunden wird. Hat der Widerstand die Länge l und der Verbraucher ist an einen Längenteil x des Widerstandes parallel geschaltet, so gilt:

$$\frac{U_x}{U_0} = \frac{x}{l}$$

Widerstandsnetzwerke

Für eine Reihenschaltung von k Widerständen R_k gilt:

$$\begin{aligned} U_0 &= \sum_k U_k \\ U_0 &= \sum_k R_k \cdot I_k \\ U_0 &= I \cdot \sum_k R_k \\ R_{ges} &= \sum_k R_k \end{aligned}$$

Für eine Parallelschaltung von k Widerständen R_k gilt:

$$I_0 = \sum_k I_k$$

und

$$U = U_0 = U_k ,$$

sodass

$$\begin{aligned} \frac{U}{R_{ges}} &= \sum_k \frac{U}{R_k} \\ \frac{1}{R_{ges}} &= \sum_k \frac{1}{R_k} \end{aligned}$$

Innenwiderstand einer Spannungsquelle

Jede Spannungsquelle hat intern einen Widerstand, der durch Leitungen innerhalb der Spannungsquelle, Kabel zu den Kontakten oder durch die Kontakte selbst verursacht wird. Dieser Widerstand wird als Innenwiderstand R_i bezeichnet. An eine solche Spannungsquelle mit der Urspannung U_0 soll ein Lastwiderstand R gehängt werden. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} U_0 &= U + U_i \\ U &= U_0 - R_i \cdot I \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Stromstärke, die von einer Spannungsquelle abgegriffen werden kann, vom Lastwiderstand (vom fließenden Strom) abhängt. Je kleiner der Lastwiderstand, desto kleiner der Spannungsabfall über dem Lastwiderstand. Die Stromstärke, die in einem Stromkreis eines Widerstandes und einer realen Spannungsquelle fließt, ergibt sich folglich zu

$$I = \frac{U}{R_i + R}$$

Die Spannung am Lastwiderstand ist

$$U = \frac{R \cdot U_0}{R_i + R}$$

Zwei Grenzfälle sind denkbar. Für $R \rightarrow 0$ (Kurzschluss) wird der Stromfluss nur durch den Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle begrenzt. Für $R \rightarrow \infty$ (Leerlauf) hat R_i praktisch keinen Einfluss auf den Spannungsabfall, an den Kontakten liegt die Ursprungung U_0 an.

Zur Leistungsanpassung (Anpassung des Lastwiderstandes zur Maximierung der Leistung):

$$P = U \cdot I$$

$$P = R \cdot I^2$$

$$P = R \cdot \frac{U_0^2}{(R_i + R)^2}$$

Die maximale Leistung wird erzielt, wenn der Lastwiderstand R gleich dem Innenwiderstand R_i ist. Die maximale Leistung ist folglich

$$P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Auch für die Wechselspannungsquelle gilt, dass die maximale Leistung erzielt wird, wenn Last- und Innenwiderstand gleich sind.

Wheatstone-Brücke

Widerstandsmessung eines unbekanntes Widerstandes R_d durch Vergleich mit einstellbaren, bekannten Widerständen R_a, R_b, R_c . R_a und R_b werden seriell an eine Spannungsquelle angeschlossen, parallel dazu wird die Serienschaltung von R_c und R_d geschaltet. Ein Strommessgerät wird auf der einen Seite zwischen R_a und R_b , auf der anderen Seite zwischen R_c und R_d angeklemt. Nun werden R_a, R_b, R_c so angepasst, dass durch das Strommessgerät kein Strom fließt. Das bedeutet einerseits, dass sich das Strommessgerät auf einer Äquipotentiallinie befindet, sodass

$$U_d = U_b$$

$$R_d \cdot I_d = R_b \cdot I_b$$

$$U_c = U_a$$

$$R_c \cdot I_c = R_a \cdot I_a$$

Dadurch, dass durch das Messgerät kein Strom fließt, gilt auch $I_a = I_b$ und $I_c = I_d$. Dies führt zu

$$\frac{R_d}{R_c} = \frac{R_b}{R_a}$$

$$R_d = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}$$

2.4 Leitungsmechanismen

Nach dem DRUDE-Modell gilt

$$m_e \cdot \dot{v}_d - \frac{m_e \cdot v_d}{\tau} = q \cdot E$$

Im stationären Zustand bedeutet dies

$$v_d = \frac{q \cdot \tau}{m_e} \cdot E$$

mit $v_d = \mu \cdot E$, $\mu = \frac{\sigma}{q \cdot n}$ folgt

$$\frac{\sigma}{q \cdot n} = \frac{q \cdot \tau}{m_e}$$

$$\sigma = \frac{q^2 \cdot \tau \cdot n}{m_e}$$

Metalle sind also Kaltleiter. Die mittlere Stoßzeit nimmt mit steigender Temperatur ab.

Dieser Effekt gilt auch für Halbleiter, jedoch ist hier die Konzentration n der Ladungsträger stark temperaturabhängig, sodass Halbleiter über einen breiten Temperaturbereich eine mit der Temperatur steigende Leitfähigkeit aufweisen. Hier kommt außerdem noch hinzu, dass sowohl Elektronen im Leitungsband als auch Defektelektronen im Valenzband als Ladungsträger wirken. Halbleiter werden auch als Heißleiter bezeichnet. Es gilt

$$\sigma(T) \propto e^{\frac{E_g}{2k_B \cdot T}}$$

Prof. Dr. Andreas Pöpl
„Experimentalphysik“
Vorlesung 29.05.2013

In festen Elektrolyten erfolgt die Leitung meist über Kationen- oder Anionen-Fehlstellen, es gibt aber auch Protonenleitfähigkeit (über Wasserstoffbrücken). In flüssigen Elektrolyten erfolgt sie über frei bewegliche Kationen und Anionen.

In flüssigen Elektrolyten steigt die Leitfähigkeit mit der Temperatur. Mit steigender Konzentration steigt die Leitfähigkeit anfangs, nimmt dann aber wieder ab, da die Beweglichkeit der einzelnen Ionen durch Cluster-Bildung abnimmt.

In Gasen erfolgt unselbstständige Entladung, wenn die Ionisation durch äußere Einwirkung erfolgt. Bei genügend hohen Spannungen kommt es zu einer Sättigung. Der Strom bricht zusammen, wenn keine Ladungsträger mehr von außen erzeugt werden. Wird die Spannung noch weiter erhöht, kann es zu selbstständiger Entladung kommen (Gasionen erzeugen auf ihrem Weg neue Gasionen).

3 Magnetfelder

3.1 Magnetfelder von Permanentmagneten

Hier sind die magnetische Feldstärke \vec{H} ($\frac{A}{m}$) und die magnetische Flussdichte (magnetische Induktion) $\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ ($\frac{Vs}{m^2}$) von Bedeutung. Die Permeabilität des Vakuums beträgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Anmerkung: Dass die magnetische Flussdichte $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ist und die elektrische Flussdichte $\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\epsilon}$, hängt damit zusammen, dass Ladungen in elektromagnetischen Feldern nach

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

abgelenkt werden.

Das Feldlinienbild eines Permanentmagneten ist dem Feldlinienbild des elektrischen Dipols ähnlich. Tatsächlich sind Permanentmagneten magnetische Dipole. Es gibt keine isolierten magnetischen Pole. Daraus folgt die zweite MAXWELLSche Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \iint \vec{B} \circ d\vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

3.2 Magnetfelder stationärer Ströme

3.2.1 Ampèresches Gesetz

Experiment Ein stationärer Strom fließt durch einen geraden Leiter. Die Linien des magnetischen Feldes bilden konzentrische Kreise um den Leiter. Der Einheitsvektor des magnetischen Feldes \vec{B} wird als \vec{e}_φ bezeichnet.

Experiment Die magnetische Flussdichte wird in Abhängigkeit vom Strom und dem Abstand gemessen. Es wird ein linearer Zusammenhang $\vec{B} \propto \frac{I}{r}$ festgestellt.

Aus allen Experimenten zusammen folgt das integrierte BIOT-SAVART-Gesetz:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

Integration entlang einer Feldlinie liefert:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \circ d\vec{s} &= \oint H \cdot ds \\ &= \oint H(r) \cdot r \cdot d\varphi \\ &= \oint \frac{I}{2\pi} \cdot d\varphi \\ &= I \end{aligned}$$

Dies ist die dritte MAXWELLSche Gleichung (AMPÈRE-Gesetz), die allerdings nur für stationäre Ströme gilt:

$$\begin{aligned} I &= \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} &= \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Es bilden $d\vec{a}$ und $d\vec{s}$ sowie \vec{j} und \vec{H} eine Rechtsschraube. Mit dem STOKES-Satz folgt:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{a} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}$$

3.2.2 Anwendungen des Ampère-Gesetzes

1. unendlich langer, geradliniger, stromführender Leiter mit dem Radius r_0

- Für $r > r_0$:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{a} \\ 2\pi \cdot H \cdot r &= \pi \cdot r^2 \cdot j \\ &= I \\ H &= \frac{I}{2\pi \cdot r} \end{aligned}$$

- Für $r < r_0$:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{a} \\ 2\pi \cdot H \cdot r &= \pi \cdot r^2 \cdot j \\ H &= \frac{1}{2} \cdot j \cdot r \\ H &= \frac{I}{2\pi \cdot r_0^2} \end{aligned}$$

2. unendlich lange stromführende Zylinderspule

- außerhalb der Spule erfolgt eine Kompensation der Magnetfelder
- innerhalb der Spule erfolgt Verstärkung der Magnetfelder der einzelnen Leiterschleifen

Experiment Im Experiment mit einer einzelnen Leiterschleufe zeigt sich, dass die Feldlinien im Innenraum der Schleufe dichter sind als außerhalb. Das Experiment mit einer langen Spule zeigt parallele Feldlinien.

Es liegen A und D auf gegenüberliegenden Seiten der Drehachse der Spule und B (C) außerhalb der Spule und senkrecht von der Achse entfernt von A (D).

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s} + \oint_B^C \vec{H} \cdot d\vec{s} + \oint_C^D \vec{H} \cdot d\vec{s} + \oint_D^A \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

$$0 + 0 + 0 + \oint_D^A \vec{H} \cdot d\vec{s} = n \cdot I$$

$$\oint_D^A \vec{H} \cdot d\vec{s} = n \cdot I$$

3.2.3 Differentielles Biot-Savart-Gesetz

Das stromführende Leitersegment $d\vec{l}$ ruft im Abstand \vec{r} vom Leiter ein Magnetfeld hervor:

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I \cdot (d\vec{l} \times \vec{r})}{4\pi \cdot r^3}$$

Will man das Gesamtfeld $H(\vec{r})$ am Ort \vec{r} , so muss $d\vec{H}(\vec{r})$ über den gesamten Leiter integriert werden.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{\text{Leiter}} d\vec{H}(\vec{r})$$

$$= \int_{\text{Leiter}} \frac{I \cdot (d\vec{l} \times \vec{r})}{4\pi \cdot r^3}$$

3.2.4 Anwendungen des differentiellen Biot-Savart-Gesetzes

Ein Kreisstrom I (mit dem Radius R des Kreises) fließe in der x - y -Ebene. Gesucht ist $H(z)$ für $x = 0$ und $y = 0$. Es gilt

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

mit mehreren Komponenten für $d\vec{H}$, wobei aufgrund der Symmetrie nur die dH_z -Anteile berücksichtigt werden müssen.

$$\begin{aligned}
 dH_z &= \sin \alpha \cdot dH \\
 &= \frac{R}{r} \cdot dH \\
 &= \frac{R}{r} \cdot \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2} \\
 H_z &= \int_0^{2\pi} \frac{R}{r} \cdot \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2} \\
 &= \frac{R}{r} \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{R}{r^2} \\
 &= \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{r^3} \\
 &= \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}
 H_z(z=0) &= \frac{I}{2R} \\
 H_z(z \gg R) &= \frac{IR^2}{z^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

Magnetisches Feld und magnetisches Dipolmoment

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^2} \cdot \vec{r} - \vec{m} \right)$$

mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{e}_A$$

Magnetisches Dipolmoment des elektronischen Bahndrehimpulses

Der Drehimpuls eines Elektrons ist

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= m_e \cdot r \cdot v \cdot \vec{e}_A \\
 &= m_e \cdot r \cdot \frac{2\pi \cdot r}{T} \cdot \vec{e}_A
 \end{aligned}$$

Dies führt zum Strom

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{q}{T} \\
 &= -e \cdot \frac{v}{2\pi \cdot r}
 \end{aligned}$$

und damit zum magnetischem Moment

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= I \cdot A \cdot \vec{e}_A \\
 \vec{m} &= -e \cdot \frac{v}{2\pi \cdot r} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{e}_A \\
 \vec{m} &= -\frac{e}{2} \cdot v \cdot r \cdot \vec{e}_A
 \end{aligned}$$

Mit der ersten Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= \frac{-e}{2m_e} \cdot \vec{L} \\
 \vec{m} &= -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{L}
 \end{aligned}$$

mit dem BOHRschen Magneton

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Zu beachten ist, dass das Elektron zusätzlich zu dem Bahnmoment ein Spinnmoment aufweist:

$$\vec{m} = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{s}{\hbar}$$

Auch Kerne können ein Spin (Kernspin) aufweisen:

$$\vec{m}_I = g_n \cdot \mu_N \cdot \frac{I}{\hbar}$$

mit dem Kernmagneton

$$\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-29} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

3.3 Magnetische Induktion

3.3.1 Induktionsgesetz – 4. Maxwell'sche Gleichung

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \oint \vec{E} \circ d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \cdot \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ -U_{ind} &= \frac{d}{dt} \cdot \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ U_{ind} &= \frac{d}{dt} \cdot \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ &= \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass ein zeitlich verstärktes magnetisches Feld an einer Leiterschleife zu einem Magnetfeld führt, das der Ursache entgegengerichtet ist.

3.3.2 Selbstinduktion

Wir betrachten einen zeitabhängigen Strom $I(t)$ durch eine Spule mit $\frac{dI}{dt} > 0$. Der bereits fließende Strom führt zu einem Magnetfeld, welches bei weiterer Steigerung des Stromes eine Gegenspannung induziert, die zu einem Feld führt, das dem Feld des Stromes $I(t)$ entgegengesetzt ist.

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \frac{d}{dt} \cdot \iint_A \frac{dI}{dt} \cdot d\vec{a} \\ U_{ind} &= L \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

mit

$$[L] = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{H}$$

Beispiel: Zylinderspule

Die Spule habe eine Länge l und einen Querschnitt $A \ll l^2$, N Windungen und eine relative Permeabilität μ_r mit $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} B_s &= \mu \cdot H_s \\ &= \mu \cdot N \cdot \frac{I}{l}, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \frac{d}{dt} \iint_A N \cdot \vec{B}_s \cdot d\vec{a} \\ &= \frac{d}{dt} \cdot N \cdot B_s \cdot A \\ &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\mu \cdot N^2 \cdot I \cdot A}{l} \right) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l}$$

Analog zu Kondensatoren, die Energie in einem elektrischen Feld speichern, speichern Spulen Energie im magnetischen Feld.

$$\begin{aligned} dW &= P \cdot dt \\ &= U \cdot I \cdot dt \\ &= L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} \cdot dt \\ W &= \int_0^I L \cdot I \cdot dI \\ &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \end{aligned}$$

Für eine Zylinderspule gilt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \cdot V \\ w &= \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \end{aligned}$$

3.3.3 Lorentzkraft auf stromdurchflossene Leiter

Eine stromdurchflossene Leiterschleife liege in der x - y -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Sie sei von einem Magnetfeld, das in positive z -Richtung zeigt, durchsetzt. Auf dieser Leiterschleife liege ein verschiebbarer Leiter \vec{l} ($l_x = l_z = 0$), durch den der Strom in \vec{l} -Richtung fließt. Der Leiter bewege sich in $+x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$. Nach dem Induktionsgesetz gibt es folgende induzierte Spannung:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \circ d\vec{a} \\ &= \frac{d\Phi}{dt} \\ &= B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} \\ &= B \cdot \frac{l \cdot \Delta x}{\Delta t} \\ &= B \cdot l \cdot v \end{aligned}$$

Dafür muss der Experimentator eine Kraft ausüben. Für den Strom gilt:

$$I = -\frac{U_{ind}}{R}$$

$$= -\frac{B \cdot l \cdot v}{R}$$

Im Widerstand wird dabei folgende Energie umgewandelt:

$$\Delta W_{th} = P \cdot \Delta t$$

$$= I^2 \cdot R \cdot \Delta t$$

$$= I^2 \cdot R \cdot \frac{\Delta x}{v}$$

Die thermische Energie, die frei wird, muss vorher in Form von mechanischer Energie eingesetzt werden (linker Term):

$$-F_x \cdot \Delta x = I^2 \cdot R \cdot \frac{\Delta x}{v}$$

$$-F_x \cdot \Delta x = -\frac{B \cdot l \cdot v}{R} \cdot I \cdot R \cdot \frac{\Delta x}{v}$$

$$F_x = B_z \cdot l_y \cdot I$$

Es lässt sich zeigen, dass allgemeiner gilt:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Experiment Die LORENTZ-Schaukel besteht aus einem Hufeisenmagneten und einem stromdurchflossenen Leiter. Je nach Orientierung des Stromes und des Magnetfeldes wird der Leiter hineingezogen oder hinausgedrückt.

Experiment Leiter auf einer Leiterschleife in einem Magnetfeld.

Experiment Zwei parallele Drähte werden von einem Strom in gleicher Richtung durchflossen. Sie ziehen sich an. Sind die Stromrichtungen entgegengerichtet, so stoßen sie einander ab.

3.3.4 Lorentzkraft auf bewegte Ladungen

Es gilt

$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

$$= \vec{j} \circ \vec{e}_a \cdot A \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

$$= \vec{j} \circ \vec{e}_a \cdot A \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

$$= (n \cdot q \cdot \vec{v}) \circ \vec{e}_a \cdot A \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

mit $V = A \cdot \vec{e}_a \circ \vec{l}$ und $n = \frac{N}{V}$ sowie $N = 1$

$$F_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

3.3.5 Bestimmung der spezifischen Ladung

Für ein Elektron, das sich in einem homogenen Magnetfeld auf einer Kreisbahn bewegt, gilt:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_Z$$

$$e \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{m_e \cdot v^2}{r}$$

mit $e \cdot U = \frac{m_e}{2} \cdot v^2$

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{r^2 B^2}$$

In der Massenspektrometrie wird dies genutzt, um das Verhältnis zwischen Ladung und Masse eines Teilchens zu bestimmen:

$$\frac{m}{q} = \frac{r^2 \cdot B^2}{2U}$$

3.3.6 Magnetischer Dipol im Magnetfeld

Ein durch eine rechteckige Leiterschleife fließender Strom erzeugt ein magnetisches Dipolmoment

$$\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{e}_A$$

$$\vec{m} = I \cdot \vec{b} \times \vec{a}$$

Außerdem gilt

$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes folgt ein Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{b} \cdot \vec{F}_L \\ &= I \cdot (\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{B}) \\ &= I \cdot A \cdot \vec{e}_A \times \vec{B} \end{aligned}$$

Potentielle Energie

Die potentielle Energie der Leiterschleife ist unter diesen Bedingungen

$$\begin{aligned} E &= -\vec{p} \circ \vec{E} \\ &= -\vec{m} \circ \vec{B} \\ &= -m \cdot B \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Für $\theta = 0$ gibt es ein Minimum, für $\theta = \pi$ ein Maximum (energetisch ungünstig).

Normaler Zeeman-Effekt

Die bereits bekannte Gleichung

$$\vec{m}_{\text{Bahn}} = -\mu_B \cdot \frac{\vec{L}_{\text{Bahn}}}{\hbar}$$

führt bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes nach

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -\vec{m} \circ \vec{B} \\ &= \mu_B \cdot \frac{\vec{L}_{\text{Bahn}}}{\hbar} \cdot \vec{B} \\ &= \mu_B \cdot \frac{L_z}{\hbar} \cdot B \end{aligned}$$

mit $L_z = m_l \cdot \hbar$ und m_l quantisiert von $-L_{\text{Bahn}}$ bis L_{Bahn} zu

$$E_{\text{pot}} = \mu_B \cdot m_l \cdot B$$

zu einer Aufspaltung der Orbitale verschiedener Magnetquantenzahl.

Anormaler Zeeman-Effekt

Muss zusätzlich das magnetische Dipolmoment des Elektrons (Einelektronensysteme) oder des Kerns berücksichtigt werden, so führt dies zu magnetischen Resonanz (*electron spin resonance* oder *nuclear magnetic resonance*).

3.4 Magnetfelder in Materie

3.4.1 Magnetisierung

Es gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

mit

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

also

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\chi + 1) \cdot \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

3.4.2 Diamagnetismus

Wird ein Stoff in ein Magnetfeld gebracht, so führt dies zu induzierten magnetische Dipolen, die nach der LENZschen Regel der dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet sind. Dies führt zu

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

mit $\mu_r < 1$ ($\chi_m < 0$)

Für die Kraft, die auf die diamagnetische Probe wirkt, ist

$$\vec{F} = \frac{\chi_m \cdot V}{\mu_0} \cdot (\vec{B} \circ \text{grad}) \cdot \vec{B}$$

Daraus folgt, dass paramagnetische Stoffe aus dem Magnetfeld herausgedrückt werden.

3.4.3 Paramagnetismus

Paramagnetismus tritt auf, wenn Teilchen permanente magnetische Dipole haben. Im Cu^{2+} (d^9) gibt es einen ungepaarten Spin, im Fe^{3+} (d^5) einen (*low spin*) oder fünf (*high spin*) ungepaarte Spins.

3.4.4 Ferromagnetismus

Ferromagnetismus tritt bei Materialien auf, in denen Bereiche geordneter magnetischer Dipolmomente vorhanden sind. Dieses Phänomen tritt nur unterhalb der CURIE-Temperatur auf:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

Prof. Dr. Andreas Pöppl
„Experimentalphysik“
Vorlesung 19.06.2013

Bei Anlegen eines Magnetfeldes an einen ferromagnetischen, aber nicht magnetischen Stoff, kommt es zur Ordnung der Bereiche geordneter magnetischer Dipole (WEISSsche Bezirke). Bei Entfernen des Magnetfeldes bleibt ein Teil dieser Magnetisierung erhalten (Remanenz). Um die Remanenz zu löschen, muss ein entgegengesetztes Feld angelegt werden (Koerzitivkraft).

4 Wechselströme

4.1 Erregung von Wechselströmen – Generator

Eine Leiterschleife der Fläche A rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit ω im homogenen Magnetfeld \vec{B} . Es gilt die 4. MAXWELLSche Gleichung

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \circ d\vec{a} \\ U(t) &= \frac{d\Phi(t)}{dt} \\ &= -\frac{B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_U)}{dt} \\ &= B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U)\end{aligned}$$

Verbindet man die Enden der Leiterschleife über einen Widerstand miteinander, so führt die Wechselspannung zu einem Wechselstrom

4.2 Leistung im Wechselstromkreis

In Analogie zum Gleichstromkreis, in dem die Gleichung

$$P = U \cdot I$$

gilt, gilt im Wechselstromkreis für die Gleichung für die zeitabhängige Leistung

$$P(t) = U(t) \cdot I(t),$$

die aber wenig interessant ist. Interessanter ist die Wirkleistung

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot I(t) \cdot dt\end{aligned}$$

Wegen $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ folgt mit $\varphi = \varphi_I - \varphi_U$

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \cos \varphi - \frac{U_0 \cdot I_0}{2T} \cdot \int_0^T \cos(2\omega \cdot t + \varphi_U + \varphi_I) \\ \bar{P} &= \frac{U_0 \cdot I_0 \cdot \cos \varphi}{2}\end{aligned}$$

Es lassen sich die Effektivwerte von Spannung und Strom messen, die die gleiche Leistung wie im Gleichstromkreis wirken:

$$\begin{aligned}U_{eff} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \\ I_{eff} &= \frac{I_0}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Es gibt noch eine Blindleistung, die sich nach

$$\bar{P}_{blind} = \frac{U_0 \cdot I_0 \cdot \sin \varphi}{2}$$

berechnet und nicht verbraucht wird, sondern nur umgesetzt wird. Sie wird im magnetische Feld einer Spule oder das elektrische Feld eines Kondensators gespeichert und wieder an die Spannungsquelle abgegeben.

4.3 Widerstände im Wechselstromkreis

4.3.1 Frequenzabhängigkeit der Impedanzen (Wechselstromwiderstände)

Serien-RLC-Kreis

Eine RLC-Serienschaltung besteht aus einem OHMSchen Widerstand, einer Spule und einem Kondensator sowie einer Wechselspannungsquelle. Es gelte für die Spannungsquelle

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Es gilt, dass der Strom überall gleich ist. Für die Spannungen gilt

$$\begin{aligned} U(t) &= U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) \\ U(t) &= R \cdot I(t) + L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \\ \frac{dU(t)}{dt} &= R \cdot \frac{dI(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{I(t)}{C} \end{aligned}$$

Stationäre Lösung: komplexer Ansatz hilft:

$$\begin{aligned} \underline{U}(t) &= U_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \\ \underline{I}(t) &= I_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} j \cdot \omega \cdot U_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} &= R \cdot j \cdot \omega \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} + j^2 \cdot L \cdot \omega^2 \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} + \frac{I_0}{C} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} \\ j \cdot \omega \cdot \underline{U} &= j \cdot \omega \cdot R \cdot \underline{I} - \omega^2 \cdot L \cdot \underline{I} + \frac{\underline{I}}{C} \\ \underline{U} &= R \cdot \underline{I} + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \underline{I} \\ \underline{U} &= \left(R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right) \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

Der lange Faktor hat die Bedeutung eines Wechselstromwiderstandes Z :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Die Beträge der einzelnen Widerstände in Abhängigkeit von der Wechselstromfrequenz sind

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_L &= \omega \cdot L \\ Z_C &= \frac{1}{\omega \cdot C} \end{aligned}$$

Allgemein ergeben sich der Betrag und die Phasenverschiebung

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \\ \tan \varphi &= \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \end{aligned}$$

4.3.2 Einfache lineare Netzwerke

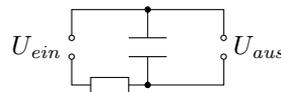
Beim linearen Netzwerk fordert man, dass stets eine lineare Beziehung zwischen Strom $I(\omega \cdot t)$ und Spannung $U(\omega \cdot t)$ herrscht. Es gilt

$$\underline{U}(\omega) = \underline{Z}(\omega) \cdot \underline{I}(\omega)$$

An ein lineares Netzwerk wird an einer Seite eine Spannung angelegt und an der anderen Seite eine andere Spannung abgegriffen. Dabei ist der Anteil der abgegriffenen zur angelegten Spannung der Übertragungsfaktor $\frac{U_o}{U_i}$.

Tiefpass

Die Schaltung



ist ein Spannungsteiler, wobei gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_o}{U_i} &= \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C \cdot R + 1} \\ &= \frac{1 - j \cdot \omega \cdot C \cdot R}{1 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2} \end{aligned}$$

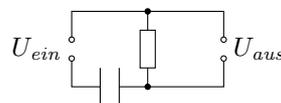
Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_o}{U_i} \right| &= \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2}} \\ \tan \varphi &= -\omega \cdot R \cdot C \end{aligned}$$

Für die hohen Frequenzen, die kaum durchgelassen werden, ist der Phasenwinkel groß, für die durchgelassenen tiefen Frequenzen niedrig.

Hochpass

Die Schaltung



vertauscht gegenüber dem Tiefpass Kondensator und OHMSchen Widerstand. Hier gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_o}{U_i} &= \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \\ \frac{U_o}{U_i} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C \cdot R}} \\ \frac{U_o}{U_i} &= \frac{\omega \cdot C \cdot R \cdot (\omega \cdot C \cdot R + j)}{1 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2} \\ \left| \frac{U_o}{U_i} \right| &= \frac{\omega \cdot C \cdot R}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2}} \end{aligned}$$

Bandpass

Ein Bandpass lässt Frequenzen in der Nähe einer bestimmten Grenzfrequenz durch. Der maximale Übertragungsfaktor beträgt $\frac{1}{2}$.

4.4 RLC-Serienschwingkreis

4.4.1 Erzwungene Schwingung

An eine Serienschaltung von OHMSchem, kapazitiven und induktivem Widerstand liege eine Spannungsquelle

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

an. Es folgt

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{U_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi}} \\ &= \frac{U_0}{Z} \cdot e^{j \cdot (\omega t - \varphi)} \\ I(t) &= I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \end{aligned}$$

mit der Phase

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R},$$

sodass sich ein Strommaximum (-resonanz) bei der Resonanzfrequenz

$$\begin{aligned} \omega_r \cdot L - \frac{1}{\omega_r \cdot C} &= 0 \\ \omega_r &= \sqrt{L \cdot C} \end{aligned}$$

Dort gilt

$$I(\omega_r) = \frac{U}{R}$$

Außerdem kann man zeigen, dass die Bandbreite (hier: doppelte Halbwertsbreite) durch

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

gegeben ist.

4.4.2 Freie Schwingung

Betrachtet wird hier ein Schaltkreis aus einem aufgeladenen Kondensator, einer Spule und einem OHMSchen Widerstand. Es gilt die Maschenregel

$$\begin{aligned} 0 &= U_L + U_R + U_C \\ 0 &= L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} \\ 0 &= L \cdot \frac{d^2I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \\ 0 &= \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I \end{aligned}$$

Die Lösung ist wie beim gedämpften harmonischen Oszillator. Dort gilt

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \gamma \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x$$

Analog muss deshalb

$$\frac{R^2}{4 \cdot L^2} \ll \frac{1}{L \cdot C}$$

gelten. Ist dies erfüllt ist, so gilt in Analogie zu

$$x(t) = A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_R \cdot t - \varphi) \quad \text{mit} \quad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Folgendes:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \cos(\omega_R \cdot t - \varphi)$$

mit

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{4L^2}}$$

Eine hohe Dämpfung in der freien Schwingung entspricht einer großen Bandbreite $2\omega = \frac{R}{L}$ bei der erzwungenen Schwingung.

5 Elektromagnetische Wellen

5.1 Entstehung

Geht man von einem RLC-Schwingkreis aus und minimiert OHMSchen (Draht), induktiven (Leiterschleife) und kapazitiven (Drahtende) Widerstand, so entsteht ein $\frac{\lambda}{2}$ -Dipol. Ein Teil der Energie, die dieser Schwingkreis verliert, wird als elektromagnetische Welle abgestrahlt.

Die Wellenlänge der erzeugten Welle ist $\lambda = 2 \cdot l$, wobei l die Länge des Schwingkreises ist.

Je nachdem, wie weit man vom Dipol entfernt ist, gibt es zwei Grenzfälle:

- Nahfeld ($r < \lambda$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^3} \cdot \left(\frac{3\vec{p} \circ \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} - \vec{p} \right)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left(\frac{3\vec{m} \circ \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} - \vec{m} \right)$$

- Im Fernfeld ($r > \lambda$) erfolgt der Aufbau der Felder nicht momentan, sondern nur mit Lichtgeschwindigkeit (\vec{e}_r sei die Ausbreitungsrichtung, \vec{r} der Abstand und t_r die retardierte Zeit):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot c^2 \cdot r} \cdot \left(\left(\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right) \times \vec{e}_r$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \cdot r} \cdot \left(\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = c \cdot \vec{B} \times \vec{e}_r$$

Aus den MAXWELLSchen Gleichungen folgt außerdem für das Vakuum

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

für das Medium

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

mit

$$\sqrt{\varepsilon_r} = n ,$$

sodass für $\mu_r = 1$

$$c = \frac{c_0}{n}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Der Feldwellenwiderstand Z_F ergibt sich nach

$$\begin{aligned} Z_f &= \frac{E}{H} \\ &= \frac{1}{\varepsilon \cdot c} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ &= 377 \Omega \end{aligned}$$

6 Wellenoptik

6.1 Interferenz

6.1.1 Interferenz durch Reflexion – Michaelson-Interferometer

Mit diesem Experiment wurde erstmals gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand des Beobachters unabhängig ist. Der Aufbau ermöglicht heute eine sehr genaue Längenmessung.